


# 修士論文

## 狭窄柔軟管および大動脈弁の 流体構造連成解析における不確かさ評価

平成 31 年 2 月提出

指導教員 泉聡志 教授 

学生証番号 37-176195 鈴木一真

# 狭窄柔軟管および大動脈弁の流体構造連成解析における不確かさ評価

37-176195 鈴木一真、指導教員 泉聡志教授

キーワード: ALE, FEM, Experimental Design, SFEM, Uncertainty Evaluation

## 1. 研究背景

心疾患の診断に際しては現在、カテーテルによる侵襲的な手法が用いられている。一方で、患者負担の軽減の観点から、非侵襲的に血流動態や血管壁挙動を把握する手法として、数値解析に期待が寄せられている。しかしながら解析には、血管形状の作成や物性値の推定において不確かさが生じうる。そのため、解析結果の不確かさによって診断が左右される場合がある[1]。また、従来の研究では不確かさの定量化は必ずしも行われていない。したがって、解析結果に付随する不確かさの評価は意義ある研究であると言える。本研究では、病変冠動脈を模擬した狭窄柔軟管および大動脈弁の流体構造連成解析における不確かさを評価することを目的とし、ALE 有限要素法に基づく一体型強連成流体構造連成解析を行う。

## 2. 研究手法

本研究では片山[2]から提供を受けた ALE 一体型流体構造連成解析プログラムを改良し用いる。まず、実験計画法に基づく分散分析を行い、複数存在する解析条件のうち結果に対して有意に影響するものを選定する。次に、有意であるとみなされた解析条件について、値を変化させた解析を行い、結果の応答を調べる。また、狭窄柔軟管モデルに対しては、不確かさを定量化する試みとして確率有限要素法解析を行った。

## 3. 狭窄柔軟管モデルの解析

病変冠動脈を模擬した狭窄柔軟管モデルを対象として拍動流解析を行った。評価する値は圧力降下の最大値である。

### 3.1 解析条件

解析条件を以下に記す。メッシュは全節点数 25659、流体要素数 46639、構造要素数 9282 である。

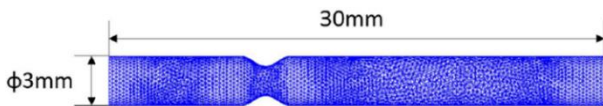


Fig. 2 Stenosed tube model

Table 1. Model of elements and physical property values

流体要素	四面体一次要素	構造要素	ソリッド要素
流体密度	水準ごと	構造密度	1000 kg/m <sup>3</sup>
粘性係数	水準ごと	ヤング率	水準ごと
		ポアソン比	0.45

Table 2. Boundary conditions

流体入口	1 Hz, 0~2kPa の sin 波状の圧力を印加する。
流体出口	抵抗を介して大気圧開放
構造体	両端変位固定

### 3.2 分散分析

因子の各水準は次のように設定した。

Table 3. Level of factors

因子	水準 1	水準 2
A: 流体密度	1050kg/m <sup>3</sup>	1060kg/m <sup>3</sup>
B: 粘性係数	3×10 <sup>-3</sup> Pa・s	4×10 <sup>-3</sup> Pa・s
C: ヤング率	0.1MPa	1MPa

分散分析の結果、流体密度、粘性係数、流体密度と粘性係数の交互作用が信頼率 99%で有意となった。一方、ヤング率は圧力降下に対して有意とはならなかった。今回の解析条件では管の変形量が微小であったためであると考えられる。

### 3.3 パラメータを変化させた解析と確率有限要素法解析の結果

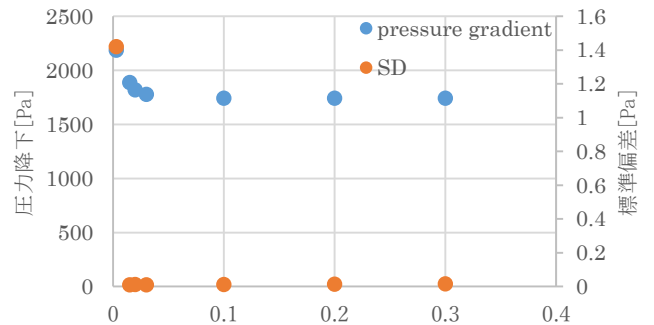


Fig. 1 Calculated pressure gradient and its standard deviation

有意であると判定された粘性係数を変化させて解析を行った。結果を Fig. 2 に示す。ただし、分散分析において構造部の影響が小さいことが確認されたので、ここでは計算量低減のため DKT シェル要素を用いている。Fig. 2 より、低粘性領域では圧力降下量が減少し、高粘性域ではほぼ一定となる傾向が見られた。低粘性域では流速の減少に応じて圧力損失が減っていく。また、高粘性域では粘性の増加と流速の減少が相殺し、圧力降下量が減少したと考えられる。

確率有限要素法解析の結果を Fig. 2 にあわせて示す。粘性係数は期待値を  $\mu_0$  として次のように与えた。

$$\mu = \mu_0(1 + \alpha) \quad (1)$$

$$E[\alpha] = 0 \quad (2)$$

$$V[\alpha] = 10^{-12} \quad (3)$$

低粘性域では標準偏差が大きく、高粘性域では標準偏差が小さくなり、粘性係数の値を変化させた解析の結果を再現した。

## 4. 大動脈弁モデルの解析

三尖弁モデルを作成し解析を行った。評価する値は大動脈弁面積のうち GOA および EOA[3]である。

#### 4.1 解析条件

解析条件を以下に示す。三尖弁の基部を、血管の入口側から 12~24mm の位置に接合している。三尖弁は、血管壁との接合部の厚さを 1mm、弁縁部厚さを 0.5mm、それ以外の厚さを 0.4mm とする DKT シェル要素である。また、Table 5.に示す弾性係数を以下では基準値と呼ぶ。

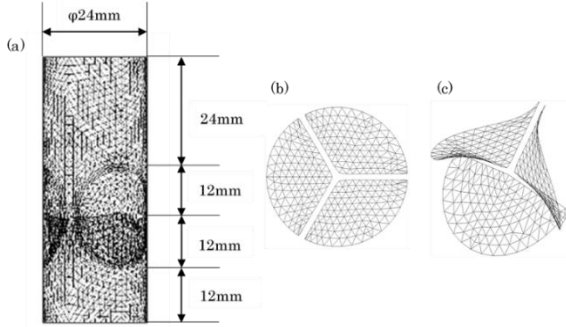


Fig. 4 Aortic valve model

Table 4. Number of nodes and elements

	節点数	流体要素数	構造要素数
三尖弁モデル	8594	37321	600

Table 5. Elastic modulus

繊維方向の縦弾性係数	繊維直交方向の縦弾性係数	ポアソン比	横弾性係数
700kPa	233kPa	0.45	80kPa

大動脈血圧波形を模擬し入口流体圧力は式(4)のように与えている。ただし単位は[Pa]。

$$P_{in} = \begin{cases} 16000 - 6000 \times (t - 0.1)^2 / 0.1^2 & (0 \leq t \leq 0.1) \\ 16000 - 6000 \times (t - 0.1)^2 / 1.5^2 & (0.1 < t \leq 0.25) \\ 10000 \times (1 - (t - 0.25) / 0.08) & (0.25 < t \leq 0.33) \end{cases} \quad (4)$$

分散分析の水準表は次の通り。

Table 6 Level of factors

因子	水準 1	水準 2
A: 入口流体圧力	$P_{in} - 0.5kPa$	$P_{in} + 0.5kPa$
B: 弁輪サイズ (半径)	12mm	13.2mm
C: 粘性係数	$3.0 \times 10^{-3} Pa \cdot s$	$4.0 \times 10^{-3} Pa \cdot s$
D: 弾性係数	基準値 $\times 0.7$	基準値 $\times 1.3$

#### 4.2 分散分析(GOA)

GOA に対しては、流体入口圧力、弁輪サイズ、弾性係数、弁輪サイズと弾性係数の交互作用が信頼率 99%、弁輪サイズと粘性係数の交互作用が信頼率 95%で有意となった。

#### 4.3 パラメータを変化させた解析(GOA)

弾性係数と弁輪サイズを変化させた解析を行った。結果を Fig. 4 に示す。レンジは  $76.0mm^2$  となった。弾性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは、弁輪サイズの変化のほうが GOA に大きな影響を及ぼすことが分かった。また、弾性係数の変化による GOA の変化量は弁輪サイズの増加に伴って大きくなった。

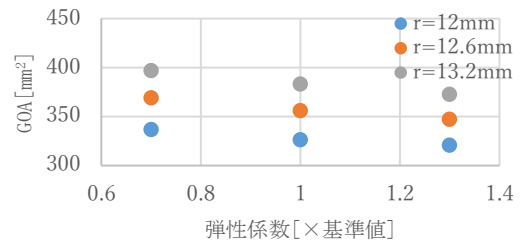


Fig. 3 Response of GOA to the change of elastic modulus and radius

#### 4.4 分散分析(EOA)

EOA に対しては、弁輪サイズと弾性係数が信頼率 99%、流体入口圧力と弁輪サイズの交互作用が信頼率 95%で有意となった。

#### 4.5 パラメータを変化させた解析(EOA)

弾性係数と弁輪サイズを変化させた解析を行った。結果を Fig. 5 に示す。レンジは  $67.4mm^2$  となった。弾性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは、弁輪サイズの変化のほうが EOA により大きな影響を及ぼすことが分かった。また、弾性係数の変化による EOA の変化量は弁輪サイズの増加に伴って大きくなった。

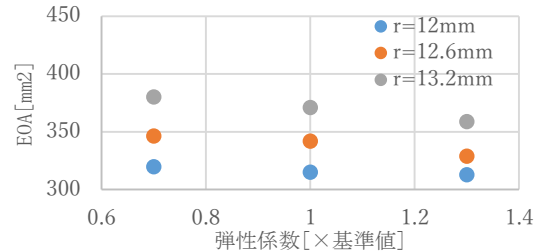


Fig. 5 Response of EOA to the change of elastic modulus and radius

## 5. 結論

### 5.1 狭窄柔軟管モデルの解析について

圧力降下に対して流体密度と粘性係数、およびその相互作用が有意となった。また、流体の粘性係数によって解析の不確かさが著しく変化することが分かった。確率有限要素法解析を実施し、粘性係数の不確かさに対する圧力降下の応答を再現した。

### 5.2 大動脈弁モデルの解析について

GOA, EOA いずれの分散分析においても弁輪サイズの F 値が最大となったため、血管および弁形状の作成に由来する不確かさが支配的であることが分かった。弾性係数と弁輪サイズの値を変化させた解析では EOA のレンジが小さくなり、不確かさに対する頑健性の観点から解析による評価値として EOA が有用である可能性が示唆された。

## 参考文献

- [1] J. Brüning. *et al.*, *Cardiovasc. Eng. Technol.*, vol. 9, no. 4, pp. 582–596, 2018.
- [2] 片山進, “流体構造連成有限要素法による大動脈弁の機能に及ぼす弁葉形状の影響解析,” 東京大学修士論文, 2009.
- [3] D. Garcia and L. Kadem, *J. Heart Valve Dis.*, vol. 15, no. 5, pp. 601–608, 2006.

# 目次

第1章 序論	7
1.1 背景	7
1.1.1 心疾患	7
1.1.2 狭窄血管を対象とする先行研究	7
1.1.3 大動脈弁を対象とする先行研究	7
1.1.4 不確かさ解析	8
1.2 目的と手法	8
1.3 本論文の概要	9
第2章 研究手法	10
2.1 流体および構造解析の基礎式	10
2.1.1 ALE 法	10
2.1.2 連続の式	11
2.1.3 Navier-Stokes 方程式	13
2.1.4 安定化手法	14
2.1.5 構造の支配方程式	15
2.2 Windkessel モデルとの接合	15
2.2.1 プロファイル関数を用いた流体境界面における自由度の縮退	15
2.2.2 Windkessel モデル	16
2.2.3 縮退した自由度と Windkessel モデルの関係式	17
2.3 流体構造連成手法	17
2.3.1 各種境界面に課される条件	17
2.3.2 流体構造連成解析の支配方程式	18
2.4 メッシュ制御手法	19
2.4.1 Elastic Smoothing	19
2.4.2 Laplace Smoothing	19
2.4.3 Reconnecting	19
2.5 実験計画法の基礎	20
2.5.1 実験計画法の目的	20
2.5.2 データの分解式	21
2.5.3 各因子の変動と分散分析	21
2.6 確率有限要素法解析の定式化	22
2.6.1 Navier-Stokes 方程式の離散化	23
2.6.2 反復計算のための線形化	27
2.6.3 不確かさを含む変数に対する確率変数の導入	29

2.6.4	オーダー評価による方程式の分離	30
2.6.5	未知変数の平均と分散の導出	32
2.6.6	確率有限要素法の得失	33
2.7	プログラムの妥当性確認と検証	34
2.7.1	アクリル管実験との比較	34
2.7.2	Rolling Up 問題	35
<b>第3章</b>	<b>狭窄柔軟管モデルの解析</b>	<b>36</b>
3.1	圧力降下	36
3.2	メッシュ評価	36
3.3	実験計画法による分散分析	38
3.3.1	因子の設定	38
3.3.2	分散分析の結果	39
3.4	粘性係数を変化させた解析	40
3.5	確率有限要素法解析の結果	43
3.6	壁面せん断応力	43
<b>第4章</b>	<b>大動脈弁モデルの解析</b>	<b>46</b>
4.1	弁の開き具合の指標	46
4.1.1	GOA	46
4.1.2	EOA	46
4.1.3	Gorlin Area と Energy loss coefficient	47
4.2	解析モデルの詳細	48
4.2.1	三尖弁モデル	48
4.2.2	解析条件	50
4.3	実験計画法による分散分析	51
4.3.1	因子の設定	51
4.3.2	GOA に対する分散分析の結果	53
4.3.3	分散分析結果の考察 (GOA)	55
4.3.4	GOA の時間変化	56
4.3.5	EOA に対する分散分析の結果	59
4.3.6	分散分析結果の考察 (EOA)	60
4.4	パラメータを変化させた解析	62
4.4.1	弁輪サイズと粘性係数の変化に対する GOA の応答	62
4.4.2	弁輪サイズと弾性係数の変化に対する GOA の応答	63
4.4.3	弁輪サイズと粘性係数の変化に対する EOA の応答	64
4.4.4	弁輪サイズと弾性係数の変化に対する EOA の応答	65
4.4.5	考察	65

第5章 結論 .....	67
5.1 研究の結論 .....	67
5.2 展望 .....	67
参考文献 .....	69
謝辞 .....	72

# 目次

図 2.1	3要素 Windkessel モデル	16
図 2.2	四面体の形状分類	20
図 2.3	狭窄柔軟管モデルの概形	34
図 2.4	Z=1.0 における流速分布	35
図 2.5	Z=2.5 における流速分布	35
図 3.1	狭窄柔軟管メッシュの概形	37
図 3.2	節点数に対する圧力降下の変化	38
図 3.3	圧力降下の各因子における水準間平均	40
図 3.4	粘性係数の変化に対する圧力降下と標準偏差の応答	41
図 3.5	圧力コンター図 ( $\mu=0.003\text{Pa}\cdot\text{s}$ , $t=2.5\text{s}$ )	41
図 3.6	流速ベクトル図 ( $\mu=0.003\text{Pa}\cdot\text{s}$ , $t=2.5\text{s}$ )	42
図 3.7	圧力コンター図 ( $\mu=0.3$ , $t=2.5\text{s}$ )	42
図 3.8	流速ベクトル図 ( $\mu=0.3$ , $t=2.5\text{s}$ )	42
図 3.9	粘性係数の変化に対する壁面せん断応力の応答	44
図 4.1	GOA と EOA の概念図	47
図 4.2	解析モデル概形 (a)血管 (b)三尖弁上面図 (c)三尖弁俯瞰図	49
図 4.3	三尖弁の繊維方向 (片山進, “流体構造連成有限要素法による大動脈弁の機能に及ぼす弁葉形状の影響解析,”東京大学修士論文, 2009.[13])	49
図 4.4	入口流体圧力の時間変化	50
図 4.5	GOA の各因子における水準間平均	55
図 4.6	GOA の時間変化の一例	56
図 4.7	$t=0.07$ における流速ベクトル図	57
図 4.8	$t=0.1$ における流速ベクトル図	58
図 4.9	EOA の各因子における水準間平均	60
図 4.10	弁輪サイズと粘性係数の変化に対する GOA の応答	62
図 4.11	弁輪サイズと弾性係数の変化に対する GOA の応答	63
図 4.12	弁輪サイズと粘性係数の変化に対する EOA の応答	64
図 4.13	弁輪サイズと弾性係数の変化に対する EOA の応答	65

# 表目次

表 2.1	流体と構造の物性値.....	34
表 3.1	各メッシュ粗さにおける節点数・要素数.....	37
表 3.2	流体・構造要素の詳細.....	37
表 3.3	境界条件.....	37
表 3.4	水準表.....	38
表 3.5	直交表.....	39
表 3.6	分散分析結果（プーリング後）.....	39
表 3.7	壁面せん断応力の分散分析結果.....	44
表 3.8	粘性係数の変化に対する壁面せん断応力と標準偏差の応答.....	45
表 4.1	三尖弁モデルの縦弾性係数および横弾性係数.....	49
表 4.2	三尖弁モデルの節点数と要素数.....	50
表 4.3	Newmark- $\beta$ 法のパラメータ.....	51
表 4.4	Windkessel モデルのパラメータ.....	51
表 4.5	水準表.....	51
表 4.6	$L_{16}(2^{15})$ 直交表.....	52
表 4.7	GOA に対する分散分析の結果.....	53
表 4.8	GOA に対する分散分析の結果（プーリング後）.....	54
表 4.9	EOA に対する分散分析の結果.....	59
表 4.10	EOA に対する分散分析の結果（プーリング後）.....	60
表 4.11	弁輪サイズと粘性係数を変化させた解析における平均と標準偏差.....	65
表 4.12	弁輪サイズと弾性係数を変化させた解析における平均と標準偏差.....	66



# 第1章 序論

## 1.1 背景

### 1.1.1 心疾患

心疾患は日本における死亡原因の中でも上位に位置するものである[1]。心疾患の原因は複数存在する。心筋に酸素を供給する冠動脈が動脈硬化などにより狭窄を生じると、心筋に十分な酸素が供給されなくなり、狭心症や心筋梗塞が生じる。また、左心室から拍出された血液の逆流を防ぐ大動脈弁に狭窄が生じると、狭心症や心不全が生じる。

これらの心疾患の診断に際しては現在、カテーテルを用いた侵襲的な手法が用いられている。しかしながら、今後は患者負担の低減の観点から、非侵襲的な診断を行っていく必要がある。非侵襲的に血管壁や血液の動態を把握し、治療に際しての意思決定を補助する手法の一つとしてシミュレーションが期待されており、現在までに多くの解析による研究が行われてきている。

### 1.1.2 狭窄血管を対象とする先行研究

狭窄血管における血液動態の解明を企図した研究は1970年代から行われてきている。

代表的な実験は、Ahmed と Giddens によるアクリル管実験[2]である。Ahmed らは、面積狭窄率 25%、50%、75%のガラス管を用い、レイノルズ数 500~2000 の範囲で実験を行った。レーザードップラー計を用い、速度分布や壁面せん断応力などの詳細なデータを取得した。続いて、同じ実験系を用いて  $Re=1000$ 、 $2000$  の流れの乱流強度分布や乱流エネルギー Spektrum を計測している[3]。また、1984年には狭窄管内拍動流を対象とし、同様の実験を行った[4]。Ahmed らによる実験は、現在でも CFD 解析の妥当性確認に用いられている。

数値解析も行われてきている。Ghalichi ら[5]は有限要素法解析ソフト FIDAP を用いて CFD を行った。狭窄率を 50%、75%、86%、 $Re=1000\sim 2000$  とした解析を行い、Ahmed らの実験結果を再現した。また、近年では流体と構造の連成作用に着目した解析も実施されている。Jahangiri ら[6]は、狭窄管の流体構造連成解析 (FSI) を行い、柔軟管内流れの解析には FSI が適当であることを示した。

### 1.1.3 大動脈弁を対象とする先行研究

大動脈弁については、Kunzelman らによる FSI[7]、Carmody らによる左心室モデルと大動脈弁モデルの連成[8]などをはじめとして、多くの解析が行われてきている。近年では臨床への応用を企図した解析へと発展しており、大動脈基部の手術後におけるバイオメカ

ニクスを解明するための有限要素法解析[9]や、人工繊維で強化された大動脈弁の FSI[10]などが行われた。また、Luraghi ら[11]は polymeric heart valve の機能評価を目的として、構造のみに着目した有限要素法解析と FSI との結果の比較を行った。実験によって得られた GOA (geometric orifice area) の再現性は FSI のほうが優れていると結論付けている。大動脈弁の解析は、診断支援や予後の予測といった場面での応用が期待されている。

#### 1.1.4 不確かさ解析

心臓弁や狭窄血管の FSI 解析においては、通常、確定的な入力に対して確定値を得ることが行われている。しかしながら、解析において数多く存在する入力パラメータには不確かさが存在している。物性値を例にとると、患者固有の物性値を用いる場合にはその測定において不確かさが存在し、測定が困難であって推定値を用いる場合には統計的な意味での不確かさが生じる。

そのため、解析による診断を行う際には、確定的な解析によって得られる値に注目するだけでなく、その不確かさを定量化し、解析結果の信頼度を評価する必要がある。しかしながら、シミュレーションによる研究あるいは診断を企図した解析において、必ずしも不確かさは考慮されてこなかった。

先行研究[12]においては、大動脈狭窄部における圧力降下を CFD によって算出し、その不確かさを定量化する試みがなされた。非侵襲的な圧力降下の数値計算は、(1) 大動脈の医用画像の取得 (2) 画像から三次元形状を再構成 (3) hemodynamic 解析 (4) 圧力降下の評価を含むポスト処理、の 4 つのステップに分けられ、いずれにおいても不確かさが生じうる。特に、MRI による形状の再構成 (生じる不確かさは voxel 解像度の  $1.4 \times 1.4 \times 2.0 \text{mm}^3$  程度) と、4D flow MRI による流量計測 (取得位置によって 10% 程度変化) に由来する不確かさの伝搬を調べた。10 人の患者について、1 人につき 9 点での解析を行い、多項式フィッティングを行った。解析結果の不確かさは、多くのケースでカテーテル検査による不確かさに比べて小さいものとなり、CFD 診断の将来性が示された。また、解析結果が診断における閾値を含むレンジで得られる場合もあり、解析結果の不確かさが診断を左右する可能性が示唆された。

今後は狭窄血管のみならず、他形状の流体構造連成解析における不確かさの評価を行っていくことも望まれている。特に大動脈弁の病変は心疾患の要因となるため、大動脈弁を対象とした流体構造連成解析を行いその不確かさを議論することには意義がある。

## 1.2 目的と手法

本研究の目的は、狭窄柔軟管および大動脈弁の流体構造連成解析によって生じうる不確

かさを定量化し、診断支援手法としてのシミュレーションの有効性を検討することである。特に大動脈弁モデルの解析においては、機能的重症度の診断指標を、シミュレーションにおける不確かさの影響の受けやすさという観点から比較した。

解析手法として、有限要素法による ALE 一体型流体構造連成解析プログラムを用いた。本研究では、まず、解析結果に影響を与えると考えられるパラメータの中から、特に影響の大きなものを選定するため、実験計画法に基づく分散分析を行う。次に、影響が大きいと判定されたパラメータの値を変化させた解析を行い、値の変化に対する解析結果の応答を調べた。

## 1.3 本論文の概要

本論文の構成を以下に示す。

### 第 1 章 序論

### 第 2 章 研究手法

まず、流体・構造それぞれの解析の基礎をなす式を示したうえで、流体構造連成解析手法について述べる。流体部に関しては、Windkessel モデルと結合する手法も示す。次に、実験計画法に基づく分散分析の概要を述べる。また、不確かさを定量化する手法の一例として本研究で取り上げた、確率有限要素法解析の基礎式を導出する。最後に、流体構造連成解析プログラムの検証および妥当性確認の結果を示す。

### 第 3 章 狭窄柔軟管モデルの解析

病変冠動脈を模擬した狭窄柔軟管を対象とし、実験計画法に基づく分散分析、パラメータを変化させた解析、確率有限要素法解析の結果と考察を述べる。

### 第 4 章 大動脈弁モデルの解析

まず、大動脈弁の開閉の指標となる AVA (Aortic Valve Area) の定義について述べる。続いて、実験計画法による分散分析およびパラメータを変化させた解析の結果と考察を述べる。

### 第 5 章 結論と展望

## 第2章 研究手法

流体の挙動を解析する手法には、流体の接する壁面を剛体と仮定して解く CFD と、流体と構造の連成作用を考える FSI とがある。血管や大動脈弁などの柔軟な組織を境界に持つ流体は、その流体力を壁面に及ぼすため、組織を変形させる。また、変形後の形状が流れ場の境界条件となるため、流体も影響を受ける。したがって、本研究で扱う狭窄柔軟管モデルおよび大動脈弁モデルの解析には、FSI が適当である。

本節では、流体構造連成系を記述する上での基礎となる ALE (Arbitrary Lagrangean Eulerian) 法の基礎と、流体構造連成系の支配方程式を示す。その後、有限要素法離散化するまでの手順を述べる。ただし、本節の内容は多くを先行研究[13]に負っており、特に 2.1.1 節はその内容のうち本研究と共通する部分の概要をまとめたものである。

### 2.1 流体および構造解析の基礎式

#### 2.1.1 ALE 法

流体構造連成問題においては、流れ場の境界形状が時間発展とともに変化するため、境界面の記述が必要である。その際、物質追従視点である Lagrange 座標系を用いると、物質の変形や流動に伴って座標系が変形するため、大変形を伴う計算が不可能となる。また、空間固定視点である Euler 法では、流体と構造の境界面の記述が困難である。

境界面の記述には IB (Immersed Boundary) 法や ALE (Arbitrary Lagrangean-Eulerian) 法が用いられている。IB 法は大変形に対して有利な記述法であるとされるが、流体と構造の境界面の記述法が正確性に欠け、高精度な計算のためにメッシュを非常に細かく切らなければならないという問題がある[10]。一方で ALE 法は IB 法ほどのメッシュ密度は要求されないが、大変形を起こした場合の計算の不安定性が問題とされる。本研究では、計算が破綻しない範囲での変形を扱っていること、および計算コストの観点から、ALE 法を採用する。

ALE 法においては、物質追従視点である Lagrange 座標系および空間固定視点である Euler 座標系とは本質的に無関係な ALE 座標系により物理量を表現する。

まず、Lagrange 座標系  $\mathbf{X}$ 、Euler 座標系  $\mathbf{x}$ 、ALE 座標系  $\boldsymbol{\chi}$  を設定する。各座標系における物理量の時間偏導関数を導く。任意の物理量を  $A$  とおくと、その Lagrange 座標系における時間偏微分は次の式で与えられる。

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

ただし、右下の添え字はその座標系での値を意味する。これを ALE 座標系で記述すると、

$$\frac{\partial A}{\partial t}\Big|_x = \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_x + \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}\Big|_x \quad (2.2)$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_x + w_i \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \quad (2.3)$$

$$w_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}\Big|_x \quad (2.4)$$

となる。ここで、物理量  $A$  に Euler 座標系を選択すると、

$$v_i = \hat{v}_i + (\mathbf{x} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{w} \quad (2.5)$$

となる。ただし、

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_x \quad (2.6)$$

$$\hat{v}_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}\Big|_x \quad (2.7)$$

である。ここで、次のベクトルを定義する。

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \quad (2.8)$$

式(2.8)を式(2.3)に代入すると、ALE 法における時間導関数の基本式(2.9)を得る。

$$\frac{\partial A}{\partial t}\Big|_x = \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_x + (A \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{c} \quad (2.9)$$

式(2.9)において  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ 、すなわち ALE 座標系に対する Euler 座標系の相対速度が  $\mathbf{0}$  ならば、ALE 座標系は Euler 座標系に一致し、物理量の記述は Euler 座標系基準となる。また、 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 、すなわち、Lagrange 座標系から見た Euler 座標系の相対速度と ALE 座標系から見た Euler 座標系の相対速度が等しいとき、ALE 座標系は Lagrange 座標系に一致し、物理量の記述は Lagrange 座標系基準となる。したがって、ALE 座標系は Lagrange 座標系と Euler 座標系をベクトル  $\hat{\mathbf{v}}$  の導入により統一的に記述したものとなる。このベクトル  $\hat{\mathbf{v}}$  の値をメッシュの速度とすることで、移動境界面の追従が可能となる。

## 2.1.2 連続の式

血液は血漿成分と細胞成分からなり、一般的には非 Newton 流体であるとされる。しかしながら、血管が血液中の細胞成分に対して十分に大きい場合、血液の挙動は Newton 流体として扱ってよいとされる[14]。本研究では、狭窄柔軟管モデルは冠動脈を、三尖弁モデルは大動脈弁を想定しているため、血管径は細胞成分に対して十分に大きい。よって、流体の挙動は Newton 流体の支配方程式で記述できる。

まず、連続の式を導出する。Reynolds の輸送方程式は、 $A$  を任意の物理量として、次のように表せる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \int_{V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},t)} A dV_{\mathbf{x}} &= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + A(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes A) \right) dV_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes A) + A(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで，質量保存の原理は，物体の質量を $m$ として，

$$\frac{\partial m}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \int_{V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},t)} \rho dV_{\mathbf{x}} = 0 \tag{2.11}$$

であるから，式(2.10)において $A = \rho$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \int_{V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},t)} \rho dV_{\mathbf{x}} &= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho) \right) dV_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{V_{\mathbf{x}}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \rho) + \rho(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right) dV_{\mathbf{x}} = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる．上式は物体内の任意の位置において成立するので，被積分関数を 0 と等置することができる．したがって，質量保存則の微分形式は次式となる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) + \rho(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{2.15}$$

ここで，流体が非圧縮性であることを仮定すると，Lagrange 座標系で見た密度は時間に依存せず一定であるため，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = 0 \tag{2.16}$$

となる．これと式(2.13)，(2.14)，(2.15)から，非圧縮性の連続の式を得る．

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) = 0 \tag{2.19}$$

ただし，式(2.18)，(2.19)の導出には，式(2.17)を用いた．いま，流体の密度が空間的に一定であることを仮定すれば，密度の空間勾配と時間変化率が 0 となるから，連続の式の Euler

表記および ALE 表記, すなわち式(2.18), (2.19)は常に成り立つ. よって, 密度が一定の非圧縮性流体における連続の式は(2.17)となる.

### 2.1.3 Navier-Stokes 方程式

次に, Navier-Stokes 方程式について述べる. Cauchy の運動法則を Euler 表記した式(2.20)に, Newton 流体の構成式(2.21)を適用したものが Navier-Stokes 方程式と呼ばれる.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla_x \otimes \mathbf{v} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.21)$$

ただし,  $\mu$ はせん断弾性率,  $\lambda$ は第二粘性率である. 式(2.20)の時間導関数 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x$ を ALE 座標での値に変換すると, 式(2.22)を得る.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (2.22)$$

流速境界条件を与えられた位置 $S_1$ で 0 となる任意の関数を $\delta \mathbf{v}$ とする. これを式(2.22)に乗じて積分すると,

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \delta \mathbf{v} \cdot \{ \rho \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} + \delta (\mathbf{D} : \mathbf{T}) \right] dV \\ = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる. ただし,  $S_t$ は応力境界条件が与えられる空間である. また, ガウスの発散定理, および Cauchy の第二運動法則 $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ を用いた. いま, 非圧縮性の内部拘束(2.17)により非決定応力が存在するので, 非決定応力も未知変数に含めて解く必要がある. 流速と圧力について, 式(2.22)左辺の被積分関数の第三項における変分を実行すると,

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \delta \mathbf{v} \cdot \{ \rho \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} + \delta \mathbf{D} : \bar{\mathbf{T}} - p(\nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \right] dV \\ = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる. ただし,  $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - (-p\mathbf{I})$ である. 式(2.24)を非圧縮性 Newton 流体の構成式と比較して,  $\bar{\mathbf{T}} = 2\mu\mathbf{D}$ を得る. さらに流体密度 $\rho$ と粘性係数 $\mu$ が一定であると仮定すれば, 式(2.25)を得る.

$$\begin{aligned}
& \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dV + \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV + 2\mu \int_V \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dV \\
& - \int_V p (\nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}) dV + \int_V \delta p (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dV \\
& = \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t
\end{aligned} \tag{2.25}$$

上式が弱形式化された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の ALE 表記である。

### 2.1.4 安定化手法

式(2.25)は3次元の非定常移流拡散問題であり、数値計算においては移流項が卓越するという問題が発生する。そこで、拡散係数に人工拡散係数を加えて安定化を図る SUPG 法 (Streamline upwind/Petrov-Galerkin) を用いる。最適な人工拡散係数を用いた場合、弱形式化に用いた重み関数  $\delta \mathbf{v}$  は次のように変更される [15].

$$\delta \mathbf{v} + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \tag{2.26}$$

ただし、 $\tau_{supg}$  は安定化パラメータである。いくつかの定義が提唱されているが、本解析プログラムにおいては Tezduyar ら [16] によるものを採用し次のように定義する。

$$\tau_{supg} = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2|\mathbf{c}|}{h_e} \right)^2 + \left( \frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.27}$$

ただし、 $h_e$  は要素の代表長さであり、要素と同じ体積を持つ球の直径とした。式(2.27)から明らかのように、慣性が卓越する領域 (主流部) で

$$\tau_{supg} = \frac{h_e}{2|\mathbf{c}|} \tag{2.28}$$

となり、粘性が卓越する領域 (境界層) で

$$\tau_{supg} = \frac{h_e^2}{4\nu} \tag{2.29}$$

となる、という特徴を持つ。したがって、式(2.27)は、流れ場の各要素における慣性と粘性のバランスから決定される値であることが分かる。

また、圧力の数値的不安定を回避するため、PSPG 法 (Pressure stabilizing/Petrov Galerkin) を用いる。PSPG 法により、重み関数は次式となる。

$$\delta \mathbf{v} + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \tag{2.30}$$

安定化パラメータ  $\tau_{pspg}$  の決定法は Tezduyar らに倣い、

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \tag{2.31}$$

とした。



### 2.1.5 構造の支配方程式

基準配置を参照した Cauchy の運動法則は式(2.32), 構成則は式(2.33)となる.

$$\rho_s \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_X \right) = \nabla_X \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_s \mathbf{g} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.33)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.34)$$

## 2.2 Windkessel モデルとの接合

### 2.2.1 プロファイル関数を用いた流体境界面における自由度の縮退

理想流体の応力境界条件 (自然境界条件) は, 境界面における法線方向と接線方向の応力成分をそれぞれ  $\sigma_n$ ,  $\sigma_t$  とし, 次式で与えられる.

$$\sigma_n = -p \quad (2.35)$$

$$\sigma_t = 0 \quad (2.36)$$

本解析プログラムでは, 流入出境界面に式(2.32), (2.33)の条件が付与される. しかしながら, 応力境界条件を与えた場合, 流速に乱れが生じ解析が困難になる. そのため, 流速を安定化させる手法を境界面において適用する必要がある.

流速の安定化のため, 解析モデルを, 後述する Windkessel モデルと接合させる. モデル接合を企図し, プロファイル関数を用いて出入口境界面における流速自由度を縮退させる. ここでは, 境界面の流速と圧力を  $v_{sur}$ ,  $p_{sur}$  とし, それぞれのプロファイル関数を  $\Phi$ ,  $\Psi$  とおく. すなわち,

$$\mathbf{v} = \Phi v_{sur} \quad (2.37)$$

$$p = \Psi p_{sur} \quad (2.38)$$

とする. いま, 流速の補間関数が  $N$ , 圧力の補間関数が  $M$  であるとする. また, それぞれのプロファイル関数も同じ補間関数を用いて有限要素法離散化が行われているものとする.

$$N^r v_j^r = N^r \Phi^r v_{sur} \quad (2.39)$$

$$M^t p^t = M^t \Psi^t p_{sur} \quad (2.40)$$

式(2.36), (2.37)の両辺を比較して, 次式を得る.

$$v_j^r = \Phi^r v_{sur} \quad (2.41)$$

$$p^t = \Psi^t p_{sur} \quad (2.42)$$

実際の解析では, 流入出境界のいずれにおいても流れが十分に発達した状態であるポアズイユ流れを仮定する. したがって, 流速プロファイル関数は二次関数形, 代表流速  $v_{sur}$  は中心軸における軸方向流速を用い, 上式における縮退の自由度  $j$  は  $j = 3$  のみとなる. また,

圧力は境界面内で一様な値としている。

## 2.2.2 Windkessel モデル

血管は柔軟な組織であるため、心臓から拍出された血液によって一時的に管径が増加し、局所的に血液を蓄える。血圧の低下に伴い管径は減少し、蓄えられていた血液は前方へ送り出される。したがって、体循環において血管は血液の流路となるばかりではなく、コンデンサとしての役割を果たしている。

血液循環の 0 次元モデル化手法として、Windkessel モデルが知られている。3 要素 Windkessel モデルに基づき、解析対象となる血管の後流における体循環を下図の電気回路モデルに置き換える。 $R_1$ 、 $R_2$ は抵抗、 $C$ はコンデンサ容量である。

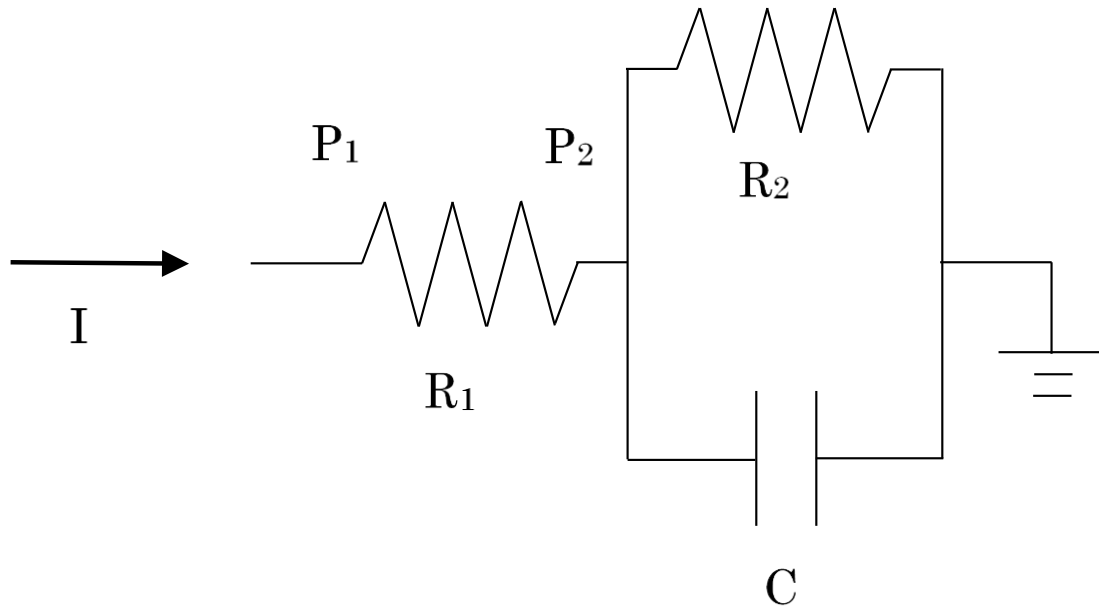


図 2.1 3 要素 Windkessel モデル

図より直ちに、次の回路方程式を得る。

$$P = P_1 + P_2 \quad (2.43)$$

$$I = \frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} + C \frac{dP_2}{dt} \quad (2.44)$$

上式を整理して、次の関係式を得る。

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)I + CR_1 \dot{i} - C\dot{P} - \frac{P}{R_2} = 0 \quad (2.45)$$

式(2.42)が狭窄柔軟管および大動脈弁モデルの後流における流量（電流）と圧力（血圧）の関係を表している。

Windkessel モデルにより体循環を表現する場合, 実際の血管の長さは考慮されていない. そのため, 圧力波の伝播時間を正しく見積もることができないという問題がある. しかしながら, 本研究においては計算の安定化を優先するとともに, 流体構造連成解析領域の後流は関心の対象としないため, Windkessel モデルを採用する.

## 2.2.3 縮退した自由度と Windkessel モデルの関係式

出口境界面 $S_{out}$ における内向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とおく. 電流 (流量)  $I$ は, 式(2.37)より,

$$I = \int_{S_{out}} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{n} ds) \quad (2.46)$$

$$= -v_{sur} \int_{S_{out}} \Phi ds \quad (2.47)$$

となる. 式(2.44)を式(2.42)に代入すれば, 電圧 $P$ を $v_{sur}$ ,  $\dot{v}_{sur}$ ,  $\dot{P}$ で表すことができる. さらに, Newmark 法を用いれば $P$ は $v_{sur}$ ,  $\dot{v}_{sur}$ で表される.

したがって, 流体の表面力 $\mathbf{f}$ は,

$$\mathbf{f} = \int_{S_{out}} (-P\Phi) ds \quad (2.48)$$

$$= -P \int_{S_{out}} \Phi ds \quad (2.49)$$

$$= \mathbf{f}(v_{sur}, \dot{v}_{sur}) \quad (2.50)$$

となる. 具体的に導出すれば次式となる. ただし,  $A_{out}$ は出口境界面の面積.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} &= \frac{(R_1 + R_2)A_{out}^2}{1 + \frac{CR_2}{\gamma\Delta t}} {}^{t+\Delta t}v_{sur}\mathbf{n} + \frac{CR_1R_2A_{out}^2}{1 + \frac{CR_2}{\gamma\Delta t}} {}^{t+\Delta t}\dot{v}_{sur}\mathbf{n} \\ &+ \frac{\frac{CR_2}{\gamma\Delta t}}{1 + \frac{CR_2}{\gamma\Delta t}} {}^t\mathbf{f} + \frac{CR_2\frac{1-\gamma}{\gamma}}{1 + \frac{CR_2}{\gamma\Delta t}} {}^t\dot{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

この式を流体構造連成解析の支配方程式と強連成させて解く.

## 2.3 流体構造連成手法

### 2.3.1 各種境界面に課される条件

粘性流体と構造の連成境界面において, 次の固着条件を適用する.

$$\boldsymbol{v}^f = \boldsymbol{v}^s \quad (2.52)$$

ただし、右上添え字 $f$ は流体要素、 $s$ は構造要素を表す。また、境界面での平衡条件は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^f \cdot \boldsymbol{n}^f + \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \boldsymbol{n}^s = \boldsymbol{h} \quad (2.53)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\boldsymbol{n}$ は単位法線ベクトル、 $\boldsymbol{h}$ は外力ベクトルを表す。

また、固定壁面における境界条件は、固着条件のみとなる。

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (\text{at rigid surface}) \quad (2.54)$$

流体の入口・出口境界面はオープン境界面として取り扱う。応力境界条件は次式となる。

$$\sigma_{ij} n_i n_j = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h} \quad (2.55)$$

$$\sigma_{ij} t_i n_j = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{h} \quad (2.56)$$

ただし、 $\boldsymbol{t}$ は単位接線ベクトルである。粘性流体の場合は Newton の粘性流体の構成式より応力境界条件を設定可能であるが、複雑な流れを扱う場合には設定が困難となる。そのため、本研究における応力境界条件は、理想流体の構成式を適用する。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.57)$$

式(2.55)、(2.56)、(2.57)より、応力境界条件の接線方向成分と法線方向成分は、2.2.1 節に記載した式(2.32)および(2.33)で与えられる。

### 2.3.2 流体構造連成解析の支配方程式

前節の各条件を用いることで、次の節点変数ベクトルが定義できる。

$$\boldsymbol{\varphi}^{fs} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}_i^s \\ \boldsymbol{v}_c \\ \boldsymbol{v}_i^f \\ p \end{Bmatrix}, \boldsymbol{U}^s = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i^s \\ \boldsymbol{u}_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

ただし、右下添え字 $i$ は独立な流体あるいは構造節点であることを、 $c$ は流体構造連成境界面の節点であることを表す。したがって、 $\boldsymbol{\varphi}^{fs}$ は構造と連成境界面と流体の速度、および圧力からなるベクトルであり、 $\boldsymbol{U}^s$ は構造と連成境界面の変位からなるベクトルである。以上のベクトルを用いることにより、流体構造連成系の支配方程式が得られる。

$${}^t M^{fs} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{fs} + {}^t C^f \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi}^{fs} + {}^t K^s \cdot \Delta \boldsymbol{U}^s = {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F} - {}^t \boldsymbol{Q}^{fs} \quad (2.59)$$

ただし、各マトリクスおよびベクトルの物理的解釈は以下となる。

- (1)  ${}^t M^{fs}$  : 時刻 $t$ における強連成実質量マトリクス。
- (2)  ${}^t C^f$  : 時刻 $t$ における移流、粘性散逸、発散の強連成マトリクス。
- (3)  ${}^t K^s$  : 時刻 $t$ における構造の強連成接線剛性マトリクス。
- (4)  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F}$  : 時刻 $t + \Delta t$ における外力等価節点力ベクトル。
- (5)  ${}^t \boldsymbol{Q}^{fs}$  : 時刻 $t$ における内力等価節点力ベクトル。

式(2.59)を、Newmark- $\beta$ 法による時間発展により解析する。

## 2.4 メッシュ制御手法

流体構造連成解析における大きな問題はメッシュの変形による計算の破綻であるが、ALE 法のみで防止することは困難である。狭窄柔軟管モデルの解析では、流体部のメッシュの質向上のため、Elastic Smoothing を採用している。また、大動脈弁モデルの解析では、Laplace Smoothing と Reconnecting を行っている。以下にそれぞれの概要を述べる。

### 2.4.1 Elastic Smoothing

流体メッシュの形状変化による計算の破綻を防止するため、流体境界におけるメッシュ追従が必要となる。本研究のプログラムでは Elastic Smoothing を用いる。

流体構造境界面が変位することで、流体メッシュが大きくなるか、あるいは境界面が流体領域に食い込み負体積を生じる。そこで、変位後の連成境界面の内部にポアソン比の小さい弾性体を設置し、連成境界面位置を境界条件として内部の変形を計算する。計算された変形量をもとにメッシュを切りなおすことで、メッシュの大変形を防止する。

### 2.4.2 Laplace Smoothing

Elastic Smoothing では行列計算を行う必要があるため、計算負荷がかかる。より簡便かつ高速なメッシュ制御手法が Laplace Smoothing である。

Laplace Smoothing の流れは以下のようになる。①：ある節点の座標を、その節点とつながりを持つ節点群の重心に移動する。②：この操作をすべての節点について行う。③：全節点の座標が収束するまで①、②を繰り返す。

メッシュの質を保持する観点からは、単独のメッシュ制御手法としては Elastic Smoothing のほうが優れている。しかしながら大動脈弁の解析では、以下に述べる Reconnecting を併用しているため、計算負荷の軽減を目的として Laplace Smoothing を採用する。

### 2.4.3 Reconnecting

本研究に用いる解析プログラムでは、メッシュの質を随時評価し、質の悪いメッシュについてはその原因を取り除くよう Reconnecting を行っている。アルゴリズムは先行研究[13]と同一のものを採用する。

まず、メッシュの質の閾値に適切な初期値を与える。ある四面体の質が閾値を下回る場合、その四面体を形状カテゴリに分類する。カテゴリは Needle 型、Wedge 型、Sliver 型、Cap 型の 4 つである[17]。

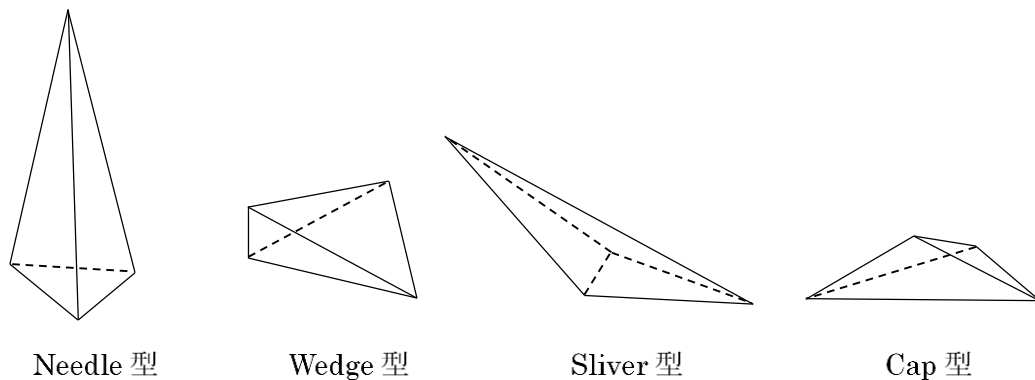


図 2.2 四面体の形状分類

Needle 型は非常に小さな立体角を持つ。Wedge 型は小さい平面角のみを持つ。Sliver 型は非常に大きな平面角を持つ。Cap 型は非常に大きな立体角を持つ。

これらの分類に従って、コネクティビティの変更を行う。Needle, Wedge 型は短い辺の点を削除することで、他の要素に組み込ませる。Cap 型の場合、立体角が大きな面が存在するが、その面が向かい合う 2 つの頂点を結んで辺を作成し、2 要素を 3 要素に分割する (Face Swapping)。Sliver 型の場合、ある辺を消去して、辺の周囲に存在していた要素を作り直す (Edge Swapping)。メッシュの質の閾値を下回る全ての四面体について、コネクティビティの変更を繰り返す。コネクティビティに変化が無くなったら閾値を下げる。閾値が下限に達するまで、Reconnecting を繰り返す。

## 2.5 実験計画法の基礎

柔軟な組織の流体構造連成解析において、解析結果に影響を及ぼす入力パラメータは数多く存在し、その影響度はパラメータによって異なる。そのため、解析への影響が特に問題となるものを絞り込む必要がある。各種パラメータの値をそれぞれ変化させて解析結果をプロットする手法を用いた場合、計算コストが大きくなる。また、パラメータ間の相互作用が明らかにならない。少ない回数の計算で各因子 (入力パラメータ) の有意性を評価する手法として、実験計画法に基づく分散分析が挙げられる。本節では、二元配置実験を例に実験計画法の基礎を概説するとともに、本研究における解析への適用方法について述べる。なお、本節の内容は参考文献[18][19]をもとに、本研究に関連する部分をまとめたものである。

### 2.5.1 実験計画法の目的

実験計画法は、ある実験ないしは解析において、目的関数を最大化あるいは最小化する条

件を探索する手法である。まず、目的関数の値の変化に寄与しない因子を検討から除外するため、各因子の影響度を評価する分散分析を行う。その際、パラメータ空間内に張ったベクトルの直交性を利用することで、 unnecessary 試行を行わないで済むように工夫がなされている。したがって、それぞれの値を独立に変化させた場合と比較して、実験回数は少ない。

実験計画法では通常、パラメータ空間内で目的関数に対して所望の値を与える点の推定が行われるが、本研究では目的関数の最大化・最小化は必要でないため、分散分析のみ実施する。

以下、二元配置実験を例に、実験計画法において用いられる数理モデルの基礎と、分散分析の概要を述べる。

## 2.5.2 データの分解式

ある測定値への影響度を調べるものを因子、因子の値を水準と呼ぶ。いま因子  $A, B$  に対して水準  $A_1, A_2, B_1, B_2$  を定めたものとする。測定値  $y_{ij}$  ( $i, j$  は因子  $A, B$  の水準に対応する番号) の内容を表現する数式 (構造模型) は次のように表される。

$$y_{ij} = m + a_i + b_j + e_{ij} \quad (2.60)$$

ここで、 $m$  は平均値、 $a_i$  および  $b_j$  は水準  $A_i$  および  $B_j$  を設定したことにより生じた平均値からのずれ、 $e_{ij}$  は残差 (原因不明の誤差) を表す。ただし、いずれも推定値である。いま、

$$a_1 + a_2 = 0 \quad (2.61)$$

なる関係が成り立っており、 $a_i$  の値は

$$a_i = \frac{\text{水準 } A_i \text{ における測定値の平均}}{\text{測定回数}} - m = \frac{y_{i1} + y_{i2}}{2} - m \quad (2.62)$$

により求めることができる。

実験ごとの水準の設定方法は直交表によって定める。直交表が与える実験回数は (水準数)<sup>(因子数)</sup> よりも少なくなるが、式(2.61)が満足されるよう設定されているため、式(2.62)および 2.4.3 節の計算は有効となる。

## 2.5.3 各因子の変動と分散分析

分散分析では、各因子による測定値の変化量を、残差による測定値の変化量と比較して、因子の有意性を判定する。本節では分散分析に用いる値を概説する。

全測定値の 2 乗和を全変動と呼び、次式で定義される。

$$SS = \sum_{ij} (y_{ij})^2 \quad (2.63)$$

平均変動 (修正項) は次式で定義される。

$$CT = \frac{(\sum_{i,j} y_{ij})^2}{\text{データ数}} \quad (2.64)$$

各因子による効果を表す因子変動（主効果）は次式で定義される。

$$S_A = \frac{(\sum_j y_{1j})^2 + (\sum_j y_{2j})^2}{\text{水準ごとのデータ数}} - CT \quad (2.65)$$

$$S_B = \frac{(\sum_i y_{i1})^2 + (\sum_i y_{i2})^2}{\text{水準ごとのデータ数}} - CT \quad (2.66)$$

残差変動は、次式で定義される。

$$S_e = \sum_{i,j} (e_{ij})^2 \quad (2.67)$$

各変動をその自由度（平均変動は 1、要因変動は水準数から 1 を引いた値、残差変動は全データ数から平均変動と要因変動の自由度を引いた値）で割ったものを分散と呼ぶ。

分散分析の流れは以下ようになる。まず、各要因の分散について、残差の分散に対する比を算出する。次に、帰無仮説「 $H_0$ : 要因A(あるいはB)は有意でない」に対して、残差と要因の自由度に応じた F 分布を用いて検定を行う。帰無仮説が棄却された要因は有意であるとする。帰無仮説が棄却されなかった要因は、測定値 $y_{ij}$ からはその効果が認められなかったものとみなす。

## 2.6 確率有限要素法解析の定式化

不確かさを定量化する手法として代表的なものはモンテカルロ法である。モンテカルロ法においてはばらつきを持たせたいパラメータの値を確率的に設定し、多数のサンプル点での解析結果の統計的なふるまいを調べる。モンテカルロ法に依らない場合でも、不確かさを記述するためにはパラメータスタディを行う場合がある。しかし、解析の回数が多くなるため、計算コストの観点からは見直されるべき手法である。

理想的な手法は、解析条件にばらつきの情報を含ませた一回の解析を行い、解析結果にもばらつきが出力されるようにするものである。この課題に対する回答の一つとして、確率有限要素法がある[20][21]。確率有限要素法では、解析条件のうち確率変数と見なされるもののモーメントを設定したうえで解析を行い、解析結果のモーメントを得る。本項では、後述するように粘性係数を確率変数とみた解析を行うため、1変数に対する確率有限要素法解析の基礎式を導出する。



まず、流体の支配方程式である Navier-Stokes 方程式を示す。次に、流体粘性係数を確率変数の摂動近似として与える。最後に、摂動法に基づき流速の変動率決定方程式群を導出する。

### 2.6.1 Navier-Stokes 方程式の離散化

弱形式化された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の ALE 表記は次のようになる。ただし、次の式ではすでに要素分割が行われている。

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dV_e + \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \{ \rho \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV_e \\
 & \quad + \int_{V_e} \delta \mathbf{D} : 2\mu \mathbf{D} dV_e - \int_{V_e} p (\nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}) dV_e \\
 & \quad + \int_{V_e} \delta p (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dV_e \\
 & = \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV_e + \int_{S_{et}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

ここで、密度および粘性係数は位置によらず一定と仮定する。

この仮定の下で、式(2.68)の各項から密度および粘性係数をくくりだすと、次の式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dV_e + \rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV_e \\
 & \quad + 2\mu \int_{V_e} \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dV_e - \int_{V_e} p (\nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}) dV_e \\
 & \quad + \int_{V_e} \delta p (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dV_e \\
 & = \rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV_e + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

式(2.69)をもとに、各項の離散化を行う。

- ・有限要素法離散化——慣性項

$$\begin{aligned}
\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dV_e &= \rho \delta_{ij} \int_{V_e} \delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x dV_e \\
&= \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m \delta v_i^m N^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n dV_e \\
&= \delta v_i^m \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^n dV_e \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \\
&= \delta v_i^m \bar{M}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$${}^m_i \bar{M}_j^n = \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^n dV_e \tag{2.71}$$

• 有限要素法離散化——移流項

$$\begin{aligned}
\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV_e &= \rho \delta_{ij} \int_{V_e} \delta v_i c_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dV_e \\
&= \delta v_i^m \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m \frac{\partial N^n}{\partial x_k} N^o dV_e c_k^o v_j^n \\
&= \delta v_i^m \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$${}^m_i \bar{\Lambda}_j^n = \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dV_e \tag{2.73}$$

• 有限要素法離散化——粘性項

$$\begin{aligned}
2\mu \int_{V_e} \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dV_e &= 2\mu \int_{V_e} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV_e \\
&= \mu \int_{V_e} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV_e \\
&= \mu \int_{V_e} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV_e \\
&= \delta v_i^m \mu \int_{V_e} \left( \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dV_e v_j^n \\
&= \delta v_i^m \bar{K}_j^n v_j^n
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$${}^m_i \bar{K}_j^n = \mu \int_{V_e} \left( \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dV_e \tag{2.75}$$

• 有限要素法離散化——压力勾配項

$$\begin{aligned}
\int_{V_e} p(\nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}) dV_e &= \int_{V_e} M^s p^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} \delta v_i^m dV_e \\
&= \delta v_i^m \int_{V_e} M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dV_e p^s
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta v_i^m B_i^s p^s \\
m_i^s B^s &= \int_{V_e} M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dV_e
\end{aligned} \tag{2.77}$$

・有限要素法離散化——非圧縮性の拘束条件項

$$\begin{aligned}
\int_{V_e} \delta p(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dV_e &= \int_{V_e} M^r \delta p^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} v_j^n dV_e \\
&= \delta p^r \int_{V_e} M^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} dV_e v_j^n \\
&= \delta p^r B_j^n v_j^n
\end{aligned} \tag{2.78}$$

・有限要素法離散化——体積力項

$$\begin{aligned}
\int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV_e &= \int_{V_e} N^m \delta v_i^m \rho g_i dV_e \\
&= \delta v_i^m \rho \int_{V_e} N^m g_i dV_e \\
&= \delta v_i^m F_B
\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$m_i^m F_B = \rho \int_{V_e} N^m g_i dV_e \tag{2.80}$$

・有限要素法離散化——表面力項

$$\begin{aligned}
\int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_{et} &= \int_{S_t} N^m \delta v_i^m t_i^* dS_{et} \\
&= \delta v_i^m \int_{S_t} N^m t_i^* dS_{et}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$= \delta v_i^m F_S$$

$$m_i^m F_S = \int_{S_t} N^m t_i^* dS_{et} \tag{2.82}$$

以上の離散化された項をまとめると，弱形式化および有限要素法離散化を行った Navier-Stokes 方程式が求められる。

$$\sum_e \left\{ \delta v_i^m \bar{m}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + \delta v_i^m \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + \delta v_i^m \bar{K}_j^n v_j^n - \delta v_i^m \bar{B}^s p^s + \delta p^r \bar{B}^r v_j^n \right\} \quad (2.83)$$

$$= \sum_e \{ \delta v_i^m \bar{m}_{iF_B} + \delta v_i^m \bar{m}_{iF_S} \}$$

$$\sum_e \left[ \delta v_i^m \left\{ \bar{m}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + \bar{K}_j^n v_j^n - \bar{B}^s p^s \right\} + \delta p^r \bar{B}^r v_j^n \right] \quad (2.84)$$

$$= \sum_e \delta v_i^m \{ \bar{m}_{iF_B} + \bar{m}_{iF_S} \}$$

$$\sum_e \{ \delta v_i^m \quad \delta p^r \} \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + \bar{K}_j^n v_j^n - \bar{B}^s p^s \\ \bar{B}^r v_j^n \end{array} \right\} \quad (2.85)$$

$$= \sum_e \{ \delta v_i^m \quad \delta p^r \} \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_{iF_B} + \bar{m}_{iF_S} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\{ \delta v_i^m \quad \delta p^r \} \sum_e \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + \bar{K}_j^n v_j^n - \bar{B}^s p^s \\ \bar{B}^r v_j^n \end{array} \right\} \quad (2.86)$$

$$= \{ \delta v_i^m \quad \delta p^r \} \sum_e \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_{iF_B} + \bar{m}_{iF_S} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\sum_e \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + \bar{K}_j^n v_j^n - \bar{B}^s p^s \\ \bar{B}^r v_j^n \end{array} \right\} \quad (2.87)$$

$$= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_{iF_B} + \bar{m}_{iF_S} \\ 0 \end{array} \right\}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \sum_e Q_e \\
&= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} m_i \bar{M}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + m_i \bar{A}_{jk}^{no} c_k^o v_j^n + m_i \bar{K}_j^n v_j^n - m_i B^s p^s \\ n_j B^r v_j^n \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \sum_e F_e \\
&= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} m_i F_B + m_i F_S \\ 0 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

とおくと、式(2.87)は、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{2.90}$$

となる。

## 2.6.2 反復計算のための線形化

有限要素離散化された式(2.90)はこのままでは速度の非線形項を含むため、計算が行えない。そこで、内力 $\mathbf{Q}$ の増分 $\Delta\mathbf{Q}$ に対して線形化を行う。Newton-Raphson 法に対応する線形化は接線剛性マトリクスの算出によってなされ、このとき移流速度は一定でないものとみなす。

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{Q} &= \sum_e \Delta Q_e \\
&= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} m_i \bar{M}_j^n \Delta \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n + m_i \bar{A}_{jk}^{no} \Delta c_k^o v_j^n + m_i \bar{A}_{jk}^{no} c_k^o \Delta v_j^n + m_i \bar{K}_j^n \Delta v_j^n - m_i B^s \Delta p^s \\ n_j B^r \Delta v_j^n \end{array} \right\} \\
&= \sum_e \left( \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \\ \Delta \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_x^s \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} m_i \bar{A}_{kj}^{on} v_k^o + m_i \bar{A}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{K}_j^n & -m_i B^s \\ n_j B^r & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta v_j^n \\ \Delta p^s \end{array} \right\} \right) \\
&= \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_x^s \end{array} \right\} + \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{A}_{kj}^{on} v_k^o + m_i \bar{A}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{K}_j^n & -m_i B^s \\ n_j B^r & 0 \end{bmatrix} \Delta \left\{ \begin{array}{c} v_j^n \\ p^s \end{array} \right\} \\
&= M\Delta\mathbf{a} + C\Delta\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

一方, 移流速度を一定とみなす反復計算は割線法となる. 割線法は, Newton-Raphson 法と比べて反復計算の回数がそれほど増加しないこと, および非線形性の強い問題に対して安定に計算が進むことなどのアドバンテージを有している. この割線法に対応する線形化は,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{Q} &= \sum_e \Delta Q_e \\
&= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} m_i \bar{M}_j^n \Delta \left. \frac{\partial v_j}{\partial t} \right|_x^n + m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o \Delta v_j^n + m_i \bar{K}_j^n \Delta v_j^n - m_i B^s \Delta p^s \\ n_j B^r \Delta v_j^n \end{array} \right\} \\
&= \sum_e \left( \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \left. \frac{\partial v_j}{\partial t} \right|_x^n \\ \Delta \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_x^s \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{K}_j^n & -m_i B^s \\ n_j B^r & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta v_j^n \\ \Delta p^s \end{array} \right\} \right) \quad (2.92) \\
&= \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \left\{ \begin{array}{c} \left. \frac{\partial v_j}{\partial t} \right|_x^n \\ \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_x^s \end{array} \right\} + \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{K}_j^n & -m_i B^s \\ n_j B^r & 0 \end{bmatrix} \Delta \left\{ \begin{array}{c} v_j^n \\ p^s \end{array} \right\} \\
&= M \Delta \mathbf{a} + \bar{C} \Delta \mathbf{v}
\end{aligned}$$

となる. 式(2.92)へ SUPG, PSPG 安定化項を加える.

・慣性項に対する SUPG

$$\int_{V_e} \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_x^n dV_e = \delta v_i^m m_i \bar{M}_{supgj}^n \left. \frac{\partial v_j}{\partial t} \right|_x^n \quad (2.93)$$

$$m_i \bar{M}_{supgj}^n = \tau_{supg} \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^o N^n \frac{\partial N^m}{\partial x_k} dV_e c_k^o \quad (2.94)$$

・移流項に対する SUPG

$$\int_{V_e} \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV_e = \delta v_i^m m_i \bar{\Lambda}_{supgj}^n v_j^n \quad (2.95)$$

$$m_i \bar{\Lambda}_{supgj}^n = \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_{V_e} N^o N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} dV_e c_k^o c_l^p \quad (2.96)$$

・圧力勾配項に対する SUPG

$$\int_{V_e} \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla p dV_e = \delta v_i^m m_i G_{supgp}^r p^r \quad (2.97)$$

$${}^m_i G_{supg}^r = \tau_{supg} \int_{V_e} N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r}{\partial x_i} dV_e c_k^o \quad (2.98)$$

・慣性項に対する PSPG

$$\int_{V_e} \tau_{pspg} (\nabla_x \delta p) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dV_e = \delta p^r {}^r M_{pspgj}^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x \quad (2.99)$$

$${}^r M_{pspgj}^n = \tau_{pspg} \int_{V_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^n dV_e \quad (2.100)$$

・移流項に対する PSPG

$$\int_{V_e} \tau_{pspg} (\nabla_x p) \cdot \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dV_e = \delta p^r {}^r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n v_j^n \quad (2.101)$$

$${}^r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n = \tau_{pspg} \int_{V_e} N^o \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dV_e c_k^o \quad (2.102)$$

・圧力勾配項に対する PSPG

$$\int_{V_e} \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla_x \delta p) \cdot (\nabla_x p) dV_e = \delta p^r {}^r \bar{B}_{pspg}^s p^s \quad (2.103)$$

$${}^r \bar{B}_{pspg}^s = \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \int_{V_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s}{\partial x_k} dV_e \quad (2.104)$$

以上の安定化項を追加すると、式(2.92)は次のようになる。ただし、2階の偏微分が残る粘性項の値は0とし、式から消去している。

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{a} + \bar{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{v}$$

$$= \sum_e \begin{bmatrix} {}^m_i \bar{M}_j^n + {}^m_i \bar{M}_{supgj}^n & 0 \\ {}^r M_{pspgj}^n & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_x \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

$$+ \sum_e \begin{bmatrix} {}^m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o + {}^m_i \bar{\Lambda}_{supgj}^n & + {}^m_i \bar{K}_j^n & - {}^m_i B^s - {}^m_i G_{supg}^r \\ {}^n_j B^r + {}^r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n & & {}^r \bar{B}_{pspg}^s \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} v_j^n \\ p^s \end{Bmatrix}$$

### 2.6.3 不確かさを含む変数に対する確率変数の導入

粘性係数を含む成分を青字で表す。

$$\Delta Q = M\Delta a + \bar{C}\Delta v$$

$$= \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n + m_i \bar{M}_{supgj}^n & 0 \\ r M_{pspgj}^n & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_x^s \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

$$+ \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{\Lambda}_{supgj}^n + m_i \bar{K}_j^n & -m_i B^s - m_i G_{supgj}^r \\ n_j B^r + r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n & r \bar{B}_{pspg}^s \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} v_j^n \\ p^s \end{Bmatrix}$$

厳密には安定化パラメータも流体物性値を含むため無視できないが、立式が困難になるため、安定化パラメータ中の流体物性値は確定値として取り扱う。

粘性係数について、

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \beta \quad (2.107)$$

なる展開が可能であるとする。ただし $\mu_0$ は期待値、 $\mu_1$ は変動率であり、 $\beta$ は期待値0の確率変数である。また、 $\mu_1$ は $\mu_0$ に比べて十分に小さいものとする。このとき、式(2.106)は、

$$\Delta Q = M\Delta a + \bar{C}\Delta v$$

$$= \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{M}_j^n + m_i \bar{M}_{supgj}^n & 0 \\ r M_{pspgj}^n & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_x^s \end{Bmatrix} \quad (2.108)$$

$$+ \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{\Lambda}_{jk}^{no} c_k^o + m_i \bar{\Lambda}_{supgj}^n + m_i \bar{K}_j^n(\mu_0) & -m_i B^s - m_i G_{supgj}^r \\ n_j B^r + r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n & r \bar{B}_{pspg}^s \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} v_j^n \\ p^s \end{Bmatrix}$$

$$+ \sum_e \begin{bmatrix} m_i \bar{K}_j^n(\mu_1 \beta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} v_j^n \\ p^s \end{Bmatrix}$$

となり、割線法に基づく線形化マトリクスは、確率変数 $\beta$ を含むものと含まないものとに分けられる。ただし $m_i \bar{K}_j^n(\mu_0)$ は $m_i \bar{K}_j^n$ が $\mu_0$ に比例することを表す。

## 2.6.4 オーダー評価による方程式の分離

Newton-Raphson 法、あるいは割線法による反復計算を行う場合の、流体構造連成系全体の支配方程式(2.59)を再掲する。

$${}^t M^{fs} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi}^{fs} + {}^t C^f \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi}^{fs} + {}^t K^s \cdot \Delta \mathbf{U}^s = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} - {}^t \mathbf{Q}^{fs} \quad (2.109)$$

${}^t M^{fs}$  : 時刻 t における強連成実質量マトリクス。

${}^t C^f$  : 時刻 t における流体の移流、粘性散逸、発散の強連成マトリクス。

${}^t K^s$  : 時刻 t における構造の強連成接線剛性マトリクス。

${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$  : 時刻 t +  $\Delta t$  における外力等価節点力ベクトル。



${}^t\mathbf{Q}^{fs}$  : 時刻  $t + \Delta t$  における内力等価節点力ベクトル.

Newmark- $\beta$  法による時間発展を考えると, 未知変数ベクトルは加速度ベクトルひとつにまとめることができる. 時間増分ステップ  $t$  から  $t + \Delta t$  までの反復第 1 回目での計算式は,

$$\begin{aligned} & [{}^t\mathbf{M}^{fs} + {}^t\mathbf{C}^f \Delta t \gamma + {}^t\mathbf{K}^s \Delta t^2 \beta] \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} - \left( {}^t\mathbf{K}^s \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}^s \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right) - {}^t\mathbf{C}^f \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \end{aligned} \quad (2.110)$$

となる. ここで,

$${}^t\mathbf{C}^f = {}^t\mathbf{C} + {}^t\mathbf{C}(\beta) \quad (2.111)$$

のように, 粘性係数に関する確率変数  $\beta$  を含むマトリクスと含まないものとの分解できることを用いれば,

$$\begin{aligned} & \left[ {}^t\mathbf{M} + \left( {}^t\mathbf{C} + {}^t\mathbf{C}(\beta) \right) \Delta t \gamma + {}^t\mathbf{K}^s \Delta t^2 \beta \right] \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} - \left( {}^t\mathbf{K}^s \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}^s \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right) - \left( {}^t\mathbf{C} + {}^t\mathbf{C}(\beta) \right) \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} & \left[ {}^t\mathbf{M} + {}^t\mathbf{C} \Delta t \gamma + {}^t\mathbf{K}^s \Delta t^2 \beta \right] \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} + {}^t\mathbf{C}(\beta) \Delta t \gamma \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} - {}^t\mathbf{K}^s \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{K}^s \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{C} \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \\ & \quad - {}^t\mathbf{C}(\beta) \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} \end{aligned} \quad (2.113)$$

となる. ここで,

$${}^t\mathbf{M} + {}^t\mathbf{C} \Delta t \gamma + {}^t\mathbf{K}^s \Delta t^2 \beta = \mathbf{A}_0 \quad (2.114)$$

$${}^t\mathbf{C}(\beta) \Delta t \gamma = \mathbf{A}_\beta \quad (2.115)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} - {}^t\mathbf{K}^s \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{K}^s \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{C} \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} = \mathbf{u}_0 \quad (2.116)$$

$$- {}^t\mathbf{C}(\beta) \Delta t {}^t\dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} = \mathbf{u}_\beta \quad (2.117)$$

とおくと, 式(2.113)は,

$$[\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\beta] \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\beta \quad (2.118)$$

と整理できる.

未知増分ベクトルが二次摂動法により展開できるとすると,

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}^{fs} = \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 + \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_\beta \beta + \frac{1}{2} \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\beta^2} \beta^2 \quad (2.119)$$

のように表示できる. 式(2.119)を式(2.118)に代入して,

$$[\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\beta] \left( \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 + \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_\beta \beta + \frac{1}{2} \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\beta^2} \beta^2 \right) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\beta \quad (2.120)$$

となる。ここで、0次項、 $\beta$ 項、 $\beta^2$ 項の係数を等値すると、変動率決定方程式群とその解を得る。

・変動率決定方程式群

$$A_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 = \mathbf{u}_0 \quad (2.121)$$

$$A_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_\beta \beta + A_\beta \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 = \mathbf{u}_\beta \quad (2.122)$$

$$A_0 \frac{1}{2} \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\beta^2} \beta^2 + A_\beta \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_\beta \beta = \mathbf{0} \quad (2.123)$$

・上式より求められる変動率

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 = A_0^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (2.124)$$

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_\beta = \frac{1}{\beta} A_0^{-1} (\mathbf{u}_\beta - A_\beta A_0^{-1} \mathbf{u}_0) \quad (2.125)$$

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\beta^2} = -\frac{2}{\beta^2} A_0^{-1} A_\beta A_0^{-1} (\mathbf{u}_\beta - A_\beta A_0^{-1} \mathbf{u}_0) \quad (2.126)$$

以上のように、未知変数ベクトルの2次までの変動率が計算できる。なお、ここで注意すべき点は、式(2.124)から式(2.126)のいずれも右辺において確率変数 $\beta$ がキャンセルされており、実際の計算においては、 $\beta$ に具体的な値を入れる必要がない、ということである。したがって、次節で述べるように、 $\beta$ の分布形状はそのモーメントによってのみ特徴づけられる。

## 2.6.5 未知変数の平均と分散の導出

確率変数 $\beta$ の関数として

$$Y = f(\beta) \quad (2.127)$$

が与えられているものとする。特に、 $\beta$ の平均値が0である場合、平均値まわりでのTaylor展開は、

$$Y = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \beta} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \beta^2 + \dots \quad (2.128)$$

となる。

1次近似法によれば、式(2.128)の第2項まで(1次項まで)を考慮する。この場合、期待値と分散は次のように与えられる。

$$E[Y] = f(0,0) \quad (2.129)$$

$$\text{Var}[Y] = \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 \beta^2 \quad (2.130)$$

よって、 $Y$ の統計量を記述するためには、2次モーメントである

$$\text{Cov}[\beta, \beta] = \beta^2 \quad (2.131)$$

を与えればよいことが分かる.

次に, 変動率と偏導関数の対応を求める. 流体構造連成解析における未知増分ベクトル (式(2.119)) と式(2.128)の両辺を比較すれば,

$$f(0,0) = \Delta\dot{\phi}_0 \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \Delta\dot{\phi}_\beta \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = \Delta\dot{\phi}_{\beta^2} \quad (2.134)$$

なる対応関係がわかる. 式(2.132)~(2.134)の右辺はいずれも変動率決定方程式群から計算されているので, これらの値を式(2.129)と(2.130), あるいは式(2.119)に代入すればよいことが分かる.

以上の手順により算出した未知増分ベクトルをオーダーの異なる項ごとに足し合わせていくことで, 時間発展させる.

## 2.6.6 確率有限要素法の得失

確率有限要素法を用いる利点は, その他の不確かさ定量化手法に比べて解析回数が低減することである. 2.6.4 節で示したように, 逆行列を算出する回数は, 変動率決定方程式の本数に一致する. Taylor 展開による近似を二次で打ち切れれば算出回数は 3 回となり, モンテカルロ法によるシミュレーションなどと比べて回数は著しく低減する. ただし, 2 変数に対する Taylor 展開を行う場合や近似の次数を上げた場合には, 逆行列の算出回数も多くなるため, 計算コストの観点から他の方法と比較検討することが必要となる.

確率有限要素法のデメリットは, 他の不確かさ定量化手法と同じく, 確率変数の高品質なモーメントを手に入れることが難しい点にある[20]. Taylor 展開の次数を上げるほどより高次のモーメントが必要になることは 2.6.5 節で示した通りである. 一般に, 3 次, 4 次といった高次のモーメントを実験的に取得することは難しく, 不確かさを精度よく取得したい場合でも安易に高次の近似を用いることはできない. また, Taylor 展開の近似を打ち切ることができるのは, 確率変数のモーメントが十分に小さいことを仮定しているからである. 低次の近似で精度よく不確かさを算出しようとするならば, この仮定の正しさは保証されなければならない.

## 2.7 プログラムの妥当性確認と検証

### 2.7.1 アクリル管実験との比較

プログラムの妥当性確認のため、Ahmed と Giddens のアクリル管実験[2]を模擬した解析を行う。流体は四面体一次要素，構造は DKT シェル要素とした。モデルの概形は下図の通り。節点数は 145037，狭窄率は 75%。狭窄部は  $\cos$  カーブで表現している。

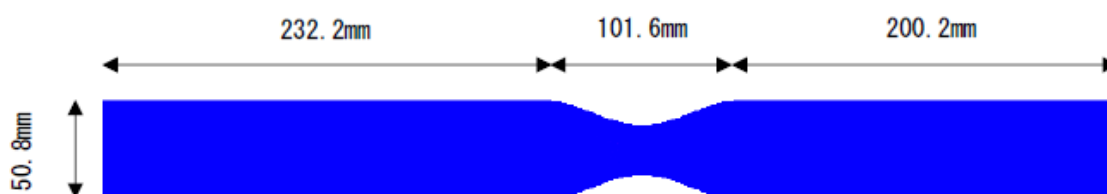


図 2.3 狭窄柔軟管モデルの概形

物性値を次表に示す。実験で用いられた流体は水とグリセリンの混合液であり，質量割合はそれぞれ 37%および 63%である。質量割合をもとに，混合液の密度と粘性係数を算出した[22]。また，狭窄管の物性値については実験論文で厳密な指定がなされていないため，アクリル樹脂として一般的と考えられる物性値を採用した[23]。

表 2.1 流体と構造の物性値

流体	密度	1149 kg/m <sup>3</sup>
	粘性係数	1.379×10 <sup>-2</sup> Pa・s
狭窄管	密度	1.18 kg/m <sup>3</sup>
	ヤング率	3.0 Gpa
	ポアソン比	0.35

境界条件について述べる。流体入口は 2.0s でレイノルズ数=500 まで正弦波状に加速させ，以降流速を一定とした。流体出口は大気圧開放している。構造体は，入口側と出口側の両端を変位固定している。

解析時刻  $t=3.13s$  における流速を次に示す。縦軸は管中心軸からの距離  $r$  をその位置における半径  $r_m$  で割った値，横軸は管軸方向流速  $V_z$  を入口側平均流速  $V_m$  で割った値である。最大狭窄部を原点として軸に沿った座標  $z$ ，および非狭窄部の直径  $D$  に対して座標  $Z = z/D$  を定義する。  $Z = 1.0, 2.5$  の位置における断面内に速度を取得する点を配置し，周囲の節点における軸方向流速から有限要素補間した。DNS (direct numerical simulation, 直接数値計算) [24] および実験結果と比較した結果，管中心軸付近でずれが見られるものの，値は良好に一致した。なお，DNS の先行研究によれば，実験系における狭窄率が実際は 75% よりも低く

かった可能性が示唆されており，本解析による結果は十分に良好な一致を見たと言える．

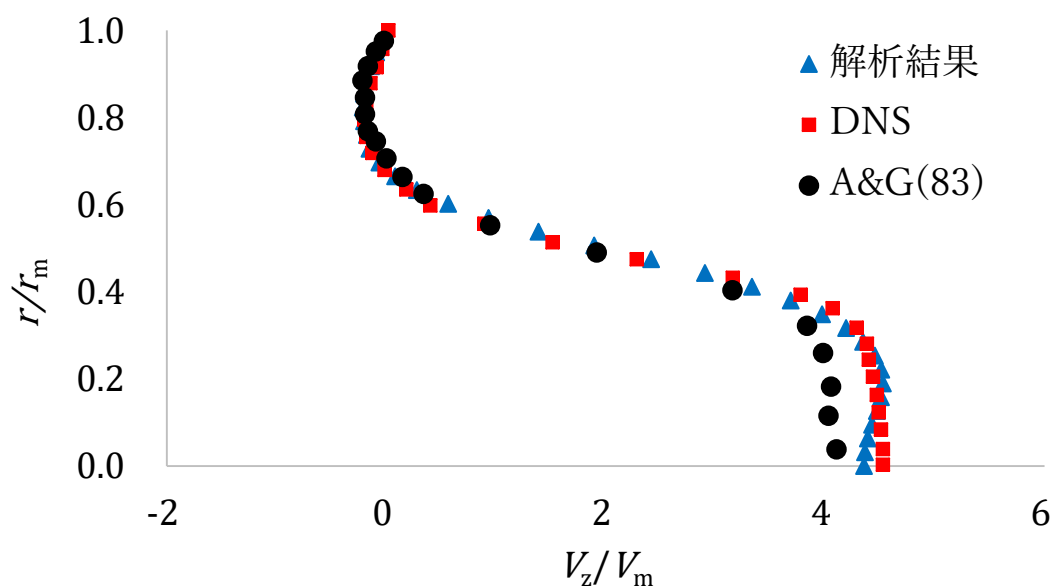


図 2.4 Z=1.0 における流速分布

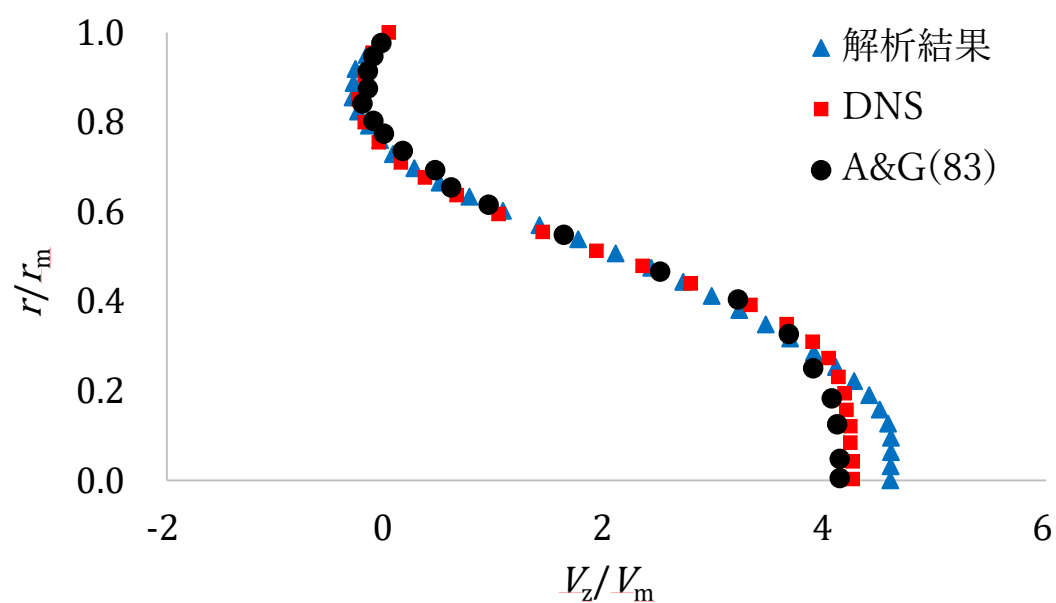


図 2.5 Z=2.5 における流速分布

## 2.7.2 Rolling Up 問題

本研究で用いた，DKT シェル要素による解析コードは先行研究において検証された[13]. Rolling Up 問題の解析において，繊維方向および繊維と直交する方向の 2 種類の解析において，回転角が理論解と誤差 1%以内で一致した．

## 第3章 狭窄柔軟管モデルの解析

狭窄柔軟管モデルに対して、実験計画法による分散分析、およびパラメータを変化させた解析を行った。その後、不確かさの定量化の試みとして、確率有限要素法による解析を行った。検討した値は圧力降下である。また、壁面せん断応力についての考察も述べる。

### 3.1 圧力降下

狭窄が存在すると、流れの急縮小・急拡大に伴って圧力損失が生じる。それぞれの損失は式(3.1), (3.2)の通りである。

・縮小損失

$$\Delta p = \zeta_c \frac{\rho u_1^2}{2} \quad (3.1)$$

・拡大損失

$$\Delta p = \zeta_a \frac{\rho u_2^2}{2} \quad (3.2)$$

ただし $u_1$ は管縮小部の流速、 $u_2$ は拡大部の流速である。係数 $\zeta_c$ および $\zeta_a$ は形状から決定される係数である。

また、円管内流れにおける摩擦による圧力損失 $\Delta p$ は、管摩擦係数を $\lambda$ 、管の長さを $l$ 、管の直径を $d$ 、流体密度を $\rho$ 、平均流速を $u$ として、次式で与えられる。

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2} \quad (3.3)$$

圧力損失は、管の直径が小さく、平均流速が速くなると大きくなる。狭窄柔軟管においては、管の直径が次第に小さくなるとともに流速も上昇していくため、非狭窄管（直管）に比べて圧力降下が大きくなると予想される。

式(3.1), (3.2), (3.3)をもって、狭窄前後での圧力降下は狭窄の機能的重症度を反映するものとして、診断指標に用いられている。よって、狭窄柔軟管モデルの解析においては、狭窄前後での圧力降下に着目する。

### 3.2 メッシュ評価

まず、モデルのメッシュ評価のため、節点数を変えたモデルに対して解析を行った。解析条件を表 3.1, 3.2, 3.3 に示す。

表 3.1 各メッシュ粗さにおける節点数・要素数

粗さ	節点数	流体節点	構造節点	要素数	流体要素	構造要素
粗い	12468	4965	2538	25947	20927	5020
中程度	25659	10490	4679	55921	46639	9282
細かい	74766	31543	11680	172147	148911	23236

表 3.2 流体・構造要素の詳細

流体要素	四面体一次要素	構造要素	ソリッド要素
流体密度	1050 kg/m <sup>3</sup>	構造密度	1000 kg/m <sup>3</sup>
粘性係数	3×10 <sup>-3</sup> Pa・s	ヤング率	0.1 MPa
		ポアソン比	0.45

表 3.3 境界条件

流体入口	1 Hz, 0~2kPa の sin 波状の圧力を印加する。
流体出口	抵抗を介して大気圧開放
構造体	両端変位固定

メッシュの全体形状は図 3.1 の通りである。

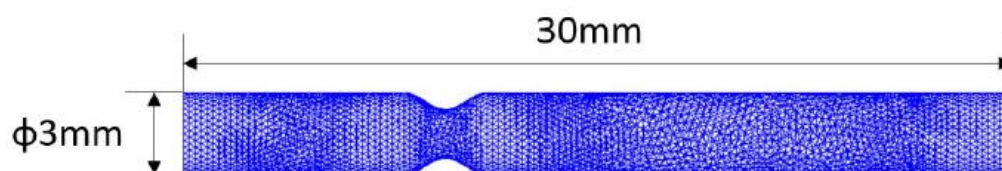


図 3.1 狭窄柔軟管メッシュの概形

解析結果を以下に示す。ただし、圧力降下は、境界条件として与えた入口流体圧力から、出口境界面から 5mm の位置での圧力を引いた値である。

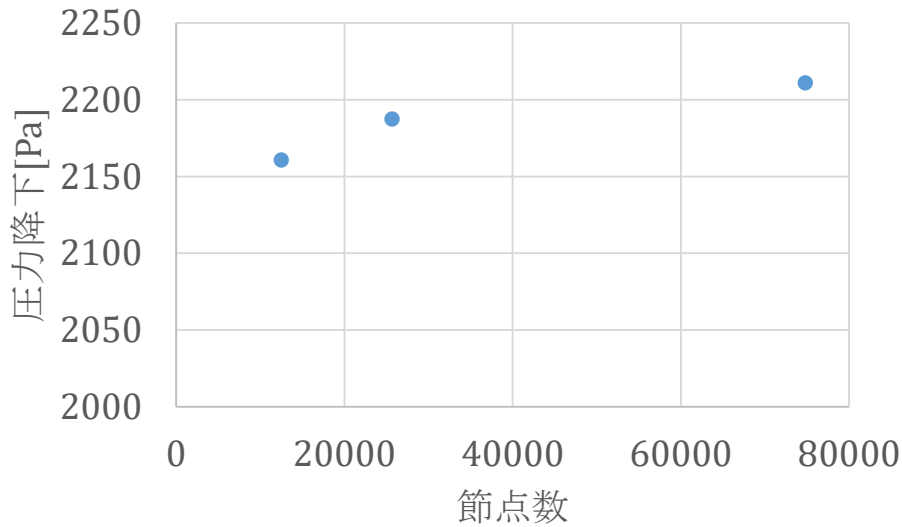


図 3.2 節点数に対する圧力降下の変化

節点数の増加に対して圧力降下は微増したが、2200Pa 程度の値に収束していくことが確認された。したがって、本章の解析では、中程度の粗さを持つメッシュを用いる。

### 3.3 実験計画法による分散分析

圧力降下に大きな影響を及ぼすパラメータを特定するため、実験計画法に基づく分散分析を行った。ここでは、流体密度、流体粘性係数、ヤング率を因子として、2水準系の直交表を用いた。上記の因子以外の解析条件は 3.2 節に準ずる。

#### 3.3.1 因子の設定

流体密度は、血液を想定しているため、ヒトの血液の密度として正常な範囲とされる  $1050\text{kg/m}^3$  から  $1060\text{kg/m}^3$  程度の値を考えればよい。また、粘性係数も同様に、 $3 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$  から  $4 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$  の範囲とする。ヤング率は、ヒトの動脈壁が取りうる値の範囲として、0.1MPa から 1MPa とした。以上より、水準は表 3.4 のように設定する。

表 3.4 水準表

因子	水準 1	水準 2
A : 流体密度	$1050\text{kg/m}^3$	$1060\text{kg/m}^3$
B : 粘性係数	$3 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$	$4 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$
C : ヤング率	0.1MPa	1MPa



また、直交表は表 3.5 のように設定した。交互作用が未知であるため、A、B、C の 3 因子が、それらの交互作用 A×B、A×C、B×C とも独立になるよう列を割り当てた。

表 3.5 直交表

	A : 流体密度	B : 粘性係数	D	C : ヤング率	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

表 3.5 のように割り当てたとき、交互作用は  $D=A \times B$ 、 $E=A \times C$ 、 $F=B \times C$  である。また、G 列は残差となる。

### 3.3.2 分散分析の結果

分散分析の結果は次のようになった。ただし、誤差と同程度の分散をもつ要因はすでに誤差の中へプーリングしてある。

表 3.6 分散分析結果 (プーリング後)

要因	要因変動	自由度	V	F	判定
平均値	$3.83 \times 10^7$	1	$3.83 \times 10^7$	-	-
A : 流体密度	$2.29 \times 10^3$	1	$2.29 \times 10^3$	$1.10 \times 10^{10}$	**
B : 粘性係数	$7.89 \times 10^{-3}$	1	$7.89 \times 10^{-3}$	$3.78 \times 10^6$	**
D : A×B	$2.18 \times 10^3$	1	$2.18 \times 10^3$	$1.04 \times 10^{10}$	**
e	$8.34 \times 10^{-7}$	4	$2.09 \times 10^{-7}$	-	-

解析結果によれば、圧力降下に対しては流体密度が特に有意であるという結果となった。また、密度と粘性係数の交互作用も、密度と同程度の F 値を持つことがわかった。しかしながら、粘性係数の F 値はそれよりも  $10^4$  のオーダーで小さかった。

有意と判定された因子について、水準ごとの平均値を示す。

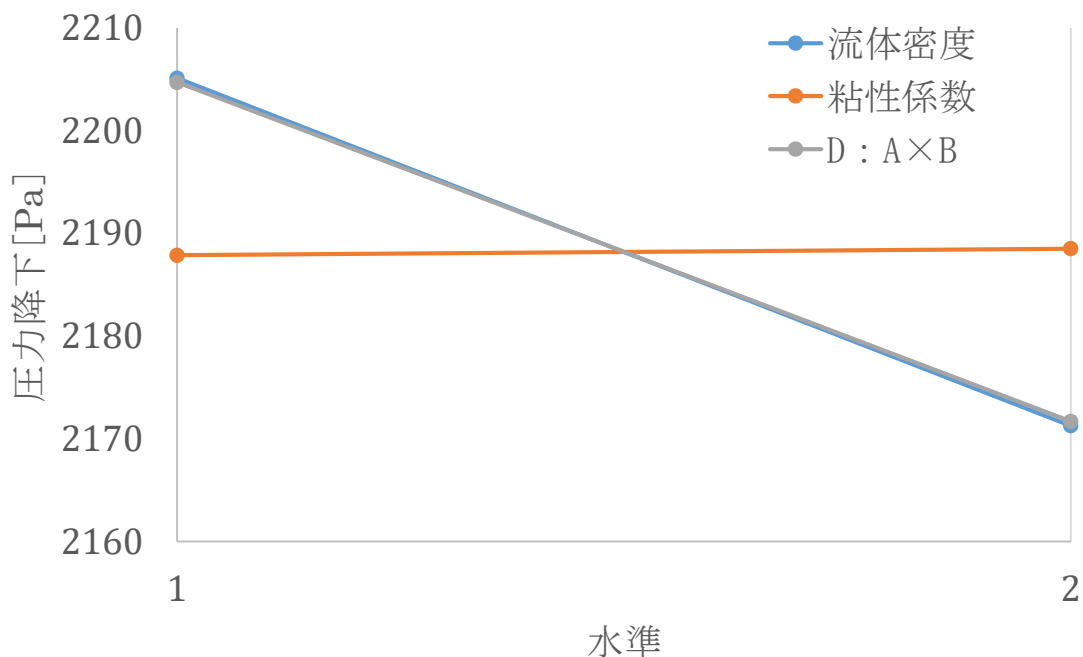


図 3.3 圧力降下の各因子における水準間平均

流体密度が大きくなると、圧力降下が小さくなった。これは、流体密度の上昇により平均流速が減少したことが、圧力降下の低減に効いてきたものと考えられる。圧力損失の式(3.1), (3.2), (3.3)によれば、損失による圧力降下は流体密度に比例するとともに、平均流速の 2 乗に比例する。したがって、表 3.4 に定めた値の範囲においては流速が減少する効果の方がより強く効いてきたと考えられる。

粘性係数が大きくなると、圧力降下はわずかに大きくなったものの、密度ほど圧力降下に影響を及ぼさなかった。流速の減少と粘性による損失とが部分的に打ち消しあったものと考えられる。

分散分析の結果から、圧力降下に対しては流体密度、粘性係数、およびそれらの交互作用が有意であることが明らかとなった。

### 3.4 粘性係数を変化させた解析

分散分析の結果から、粘性係数が有意となることが分かったので、次に粘性係数を変化させた解析を行う。値の範囲は、実験計画法で想定した範囲よりも広くとっている。

粘性係数を  $\mu = 0.003, 0.015, 0.02, 0.03, 0.1, 0.2, 0.3$  の 6 通りに変化させて解析を行った。解析結果は図 3.4 のようになった。

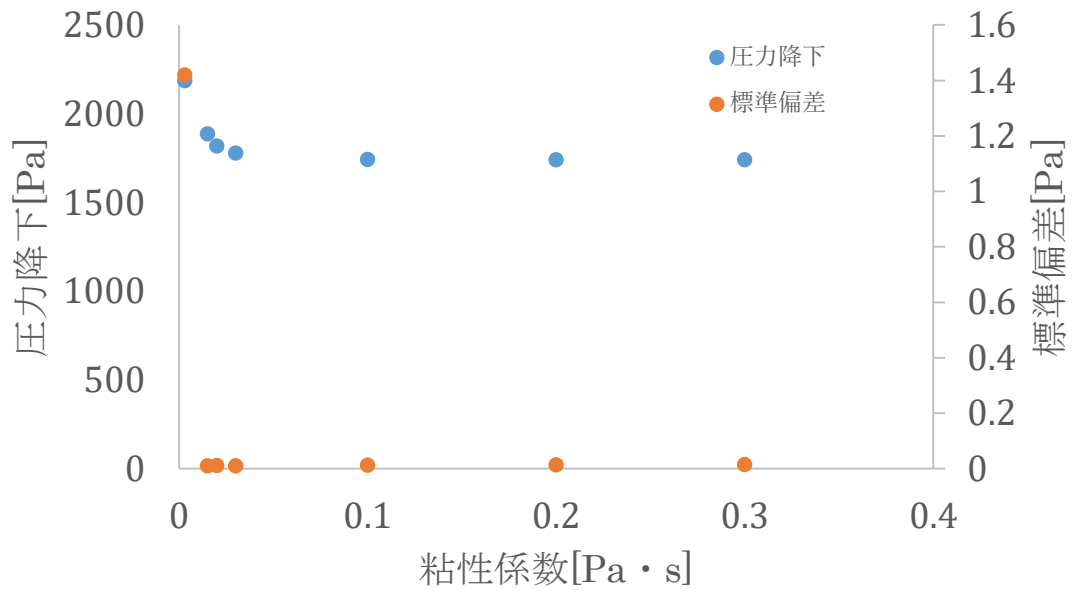


図 3.4 粘性係数の変化に対する圧力降下と標準偏差の応答

粘性係数が小さい領域では、圧力降下は粘性係数の増加に伴って減少し、また、粘性係数が大きい領域では、圧力降下は粘性係数に関わらずほぼ一定となった。このように著しく異なる傾向を見せた低粘性域と高粘性域での流体の挙動を比較するため、以下に解析時刻  $t=2.5s$  での流体圧力コンター図、流速ベクトル図を示す。ただし、ベクトル長は流速に比例している。

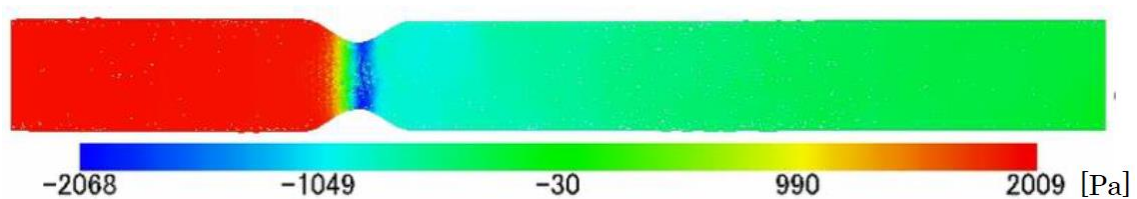


図 3.5 圧力コンター図 ( $\mu=0.003Pa \cdot s$ ,  $t=2.5s$ )

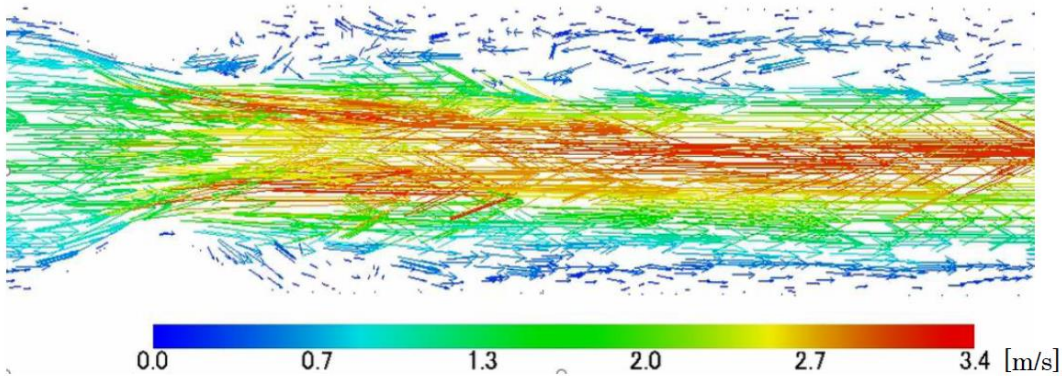


図 3.6 流速ベクトル図 ( $\mu=0.003\text{Pa}\cdot\text{s}$ ,  $t=2.5\text{s}$ )

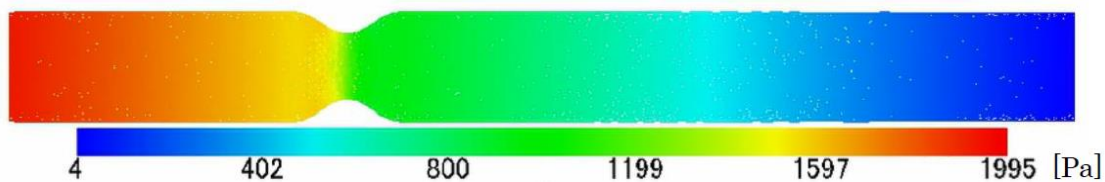


図 3.7 圧力コンター図 ( $\mu=0.3$ ,  $t=2.5\text{s}$ )

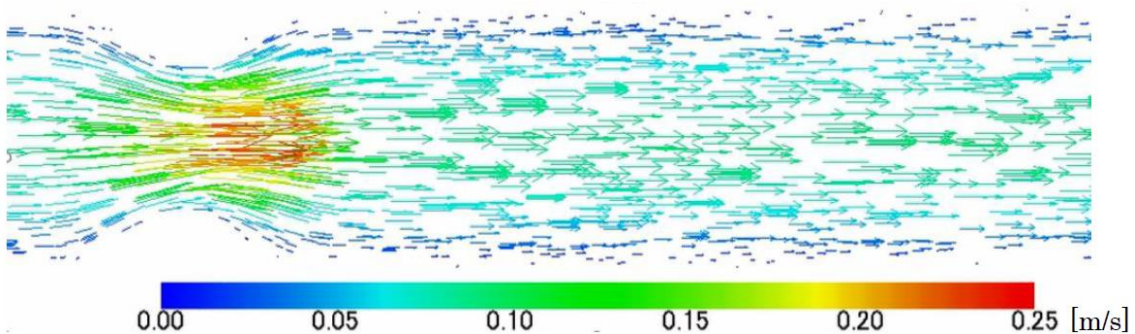


図 3.8 流速ベクトル図 ( $\mu=0.3$ ,  $t=2.5\text{s}$ )

流れ場の特徴としては、粘性係数が小さい場合には狭窄後部の壁面付近において逆流域、すなわち渦を巻いている領域が見られるのに対し、粘性係数が大きい場合には狭窄後部においても流れが壁面から剥離せず、渦を起こさないことが挙げられる。また、粘性係数が小さい場合には狭窄直後で大きな圧力降下が見られ負圧が生じているのに対し、粘性係数が大きい場合には狭窄部での圧力降下は小さく、負圧も生じていないことが分かる。

$\mu = 0.003$ の場合には、図 3.6 に見られるように、 $\mu = 0.3$ の場合よりも流速が大きくなっている。したがって低粘性領域では、粘性係数に比例した圧力降下量の増加と、粘性係数の増加で流速が減少したことによる圧力降下量の減少の二つの効果のうち後者がより支配的であったために、粘性係数の増加に伴って圧力降下が減少したと考えられる。また、高粘性領域では、これら二つの効果が相殺することで、圧力降下がほぼ一定の値になったと考えら

れる。

### 3.5 確率有限要素法解析の結果

確率有限要素法により不確かさの傾向を再現することを目的として、同じ 6 通りの値を粘性係数の期待値として確率有限要素法解析を行った。不確かさの指標として、ここでは標準偏差を示す。ただし粘性係数は、 $\mu_0$ を粘性係数の期待値、 $\alpha$ を $E[\alpha] = 0$ ,  $\text{Var}[\alpha] = 10^{-12}$ なる確率変数として、次式で与える。

$$\mu = \mu_0(1 + \alpha) \quad (3.4)$$

解析の結果を、図 3.4 にあわせて示す。粘性係数の変化に対して圧力降下が鋭敏に応答する領域（低粘性域）では標準偏差 $>1$  と大きな値となり、粘性係数によらず圧力降下がほぼ一定となる領域では標準偏差は  $10^{-2}$  程度と小さくなった。標準偏差の値は、粘性係数の変化に対する圧力降下の応答の傾向をおおむね再現した。

しかしながら、今回の研究では、確率有限要素法解析の妥当性確認を行うことができなかった。今後は、確率変数のモーメントが明らかになっている実験との比較などにより、プログラムの妥当性を確認することが必要である。

### 3.6 壁面せん断応力

本研究では、壁面せん断応力に関する検討も行った。2.6 節で述べた確率有限要素法を用いるデメリットについての一例としてここに掲載する。

血管壁に対して壁面せん断応力が作用すると内皮細胞が活性化され、活性化部位から狭窄を生じさせる物質が侵入することが知られている[25]。また、発達した狭窄に対して周方向応力が働くことでプラークの破壊が起こり、血栓が生じる。したがって、狭窄発達の指標として壁面せん断応力は重要な生理学的意味を持つ。

3.3.1 節に示した直交表をもとに、狭窄前部における壁面せん断応力の最大値に対して分散分析を行った。ただし、分散分析に用いた解析結果は 3.3 節のものと同一である。狭窄後部でも壁面せん断応力の大きな値が見られるが、パラメータの変化に対して有意でないと判定された。そのため、狭窄前部での値に着目している。以下に、分散分析表を示す。ただし、誤差と同程度の分散を持つ要因はすでに誤差の中へプーリングしてある。

表 3.7 壁面せん断応力の分散分析結果

要因	SS	f	V	F	判定
M	250	1	250	-	-
A	$4.31 \times 10^{-4}$	1	$4.31 \times 10^{-4}$	7.74	*
B	4.78	1	4.78	$8.59 \times 10^4$	**
A×B	$2.97 \times 10^{-3}$	1	$2.97 \times 10^{-3}$	53.4	*
e	$2.22 \times 10^{-4}$	4	$5.56 \times 10^{-5}$	-	-

分散分析の結果より、流体密度と粘性係数、およびその相互作用が有意であると判定された。特に、粘性係数が有意となった。

粘性係数が有意であると判定されたため、その値を変化させた解析を行った。ただし、壁面せん断応力の算出に用いた解析結果は3.4節のものと同一である。以下に結果を示す。

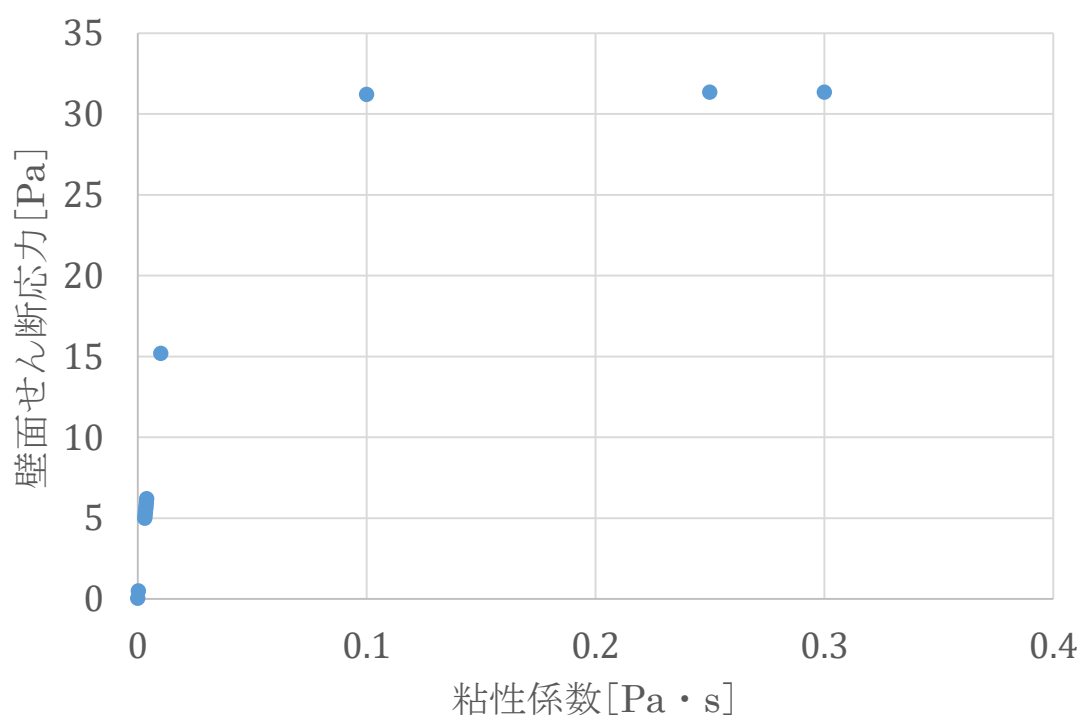


図 3.9 粘性係数の変化に対する壁面せん断応力の応答

粘性係数が小さい領域では、粘性係数の増加に伴って壁面せん断応力も線形に増加した。一方で、粘性係数が大きな領域では、粘性係数の値によらず壁面せん断応力はほぼ一定となった。ここで、壁面せん断応力は、次式で与えられる。

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.5)$$

低粘性域では、粘性係数が増加しても壁面近傍流速の減少量が小さかったために、壁面せん断応力は増加したと考えられる。また、高粘性域では、粘性の増加による壁面せん断応力の増加と、流速の低下とがオフセットし、壁面せん断応力の値がほぼ一定になったと考えられる。

続いて、粘性係数の変化に対する圧力降下の応答が異なったこれら2つの領域について、確率有限要素法解析を行った。

表 3.8 粘性係数の変化に対する壁面せん断応力と標準偏差の応答

粘性係数	壁面せん断応力	壁面せん断応力の標準偏差
$3 \times 10^{-3}$	4.43	$4.16 \times 10^{-3}$
$3 \times 10^{-1}$	32.1	$3.57 \times 10^{-2}$

応答の鋭敏さは低粘性域のほうが大きかったのに対し、確率有限要素法解析によって算出された標準偏差は低粘性流体のほうが小さくなった。確率有限要素法解析でパラメータを変化させた解析の結果を再現できなかったのは、確率有限要素法による壁面せん断応力、およびその標準偏差の算出の困難さに由来する。

確率有限要素法においては、壁面せん断応力の不確かさに対する応答をあらかじめ定式化しておく必要がある。すなわち、

$$\tau_w = \tau_{w0} + \tau_{w1}\alpha + \tau_{w2}\alpha^2 + \dots \quad (3.6)$$

のように壁面せん断応力を Taylor 展開しておいたうえで、各項の係数を算出する数式を導出しなければならない。本研究では、粘性係数と座標の期待値、および流速の平均値と分散を用い、式(3.3)から壁面せん断応力とその標準偏差を見積もったため、正確な値を算出できなかったと考えられる。

確率有限要素法は少ない計算回数で物理量の確率的応答（モーメント）を算出できる手法であるが、興味の対象となる変数の確率的応答をあらかじめ数式で表現してからプログラムに組み込まなければならない。したがって、作業コストが無視できないという点に問題がある。解析結果から算出される二次的な量（壁面せん断応力、管摩擦損失など）を得るための簡便な手法の開発が望まれる。

## 第4章 大動脈弁モデルの解析

大動脈弁モデルに対して、実験計画法による分散分析、およびパラメータを変化させた解析を行った。検討した値は GOA (geometric orifice area) および EOA (effective orifice area) である。

### 4.1 弁の開き具合の指標

左心房出口側に存在する大動脈弁は、心臓から拍出された血液の逆流を防ぐ重要な組織である。正常な大動脈弁は多くの場合3つの弁葉からなり、いずれも中心角が約120度の扇形をなしている。

大動脈弁が正常に開閉しているかを示す指標[26]はいくつか提案されており、臨床においてはしばしば併用されている。一方、多くのシミュレーションによる研究で着目されるのは GOA および EOA である。したがって、後述の分散分析においてもそれらを評価値とする。本節では面積指標の概要について述べる。

#### 4.1.1 GOA

AVA (Aortic Valve Area) の一種である GOA は、大動脈の中心軸に垂直な面において、大動脈弁の射影に覆われていない面積を指す。幾何的に定義される面積であることから、geometric orifice area と呼ばれる。GOA の測定方法はいくつか存在するが、主なものとしては心臓超音波検査、磁気共鳴画像 (MRI) などで弁の形状を取得する方法が挙げられる。

GOA の定義は直感的で理解しやすく、画像さえ取得できればその算出は容易である。しかしながら、弁に覆われていない部分の面積が弁の性能を十分に示しているとは限らない。

#### 4.1.2 EOA

EOA (effective orifice area) は、大動脈弁を通った血流が噴流になっていることに着目し、機能評価を行う。EOA は、大動脈弁において生じた噴流の最小断面積として定義される。図 4.1 に、GOA と EOA の概念図を示す。黒線が弁、青線が噴流端、楕円がその位置における噴流断面を表す。矢印は流れの向きである。弁と壁面のなす角がほぼ一定である場合には  $GOA > EOA$  となり (縮流)、弁が反った形状をしている場合は  $GOA = EOA$  となる。

EOA の測定方法は複数存在する。定義に従い、大動脈弁の位置における流速を可視化し、



噴流断面積から直接計測されることもある。一方、拍出される血液の体積を、大動脈弁位置における流速の時間積分で除した値を EOA とすることもある[27][28]。後者は一般的に、連続の式を用いた方法と呼ばれる。

前者の定義に従えば、EOA は、噴流断面において流速が最大値の 10%の値を与える位置を噴流端とした場合の断面積となる。後者の定義に従えば、一回の拍出体積(stroke volume)を $Q$ 、大動脈弁位置で流速ドップラー法により計測された流速を $V$ として、次式で与えられる。

$$EOA = \frac{Q}{\int_{Cardiac\ Cycle} V dt} \quad (4.1)$$

上式から明らかなように、上式で定義される EOA は噴流断面積そのものではなく、噴流断面積の時間平均の推定値を与える。したがって、EOA を算出するには、どちらの定義を用いたのかを明言する必要がある。

EOA は血流を輸送する実質的な血管断面積を表しているため、effective orifice area と呼ばれる。

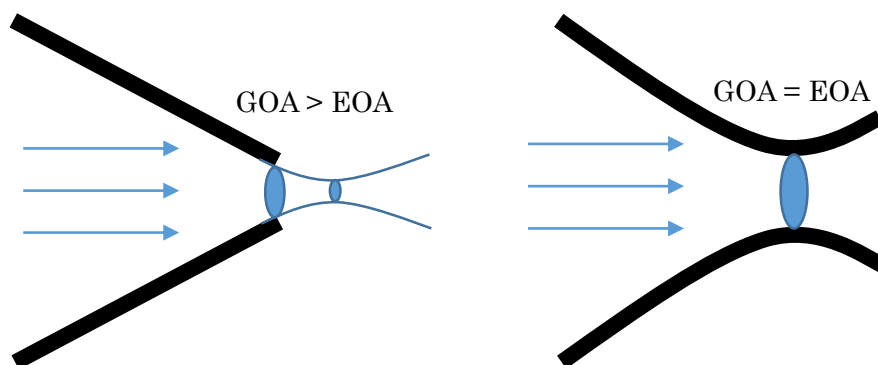


図 4.1 GOA と EOA の概念図

#### 4.1.3 Gorlin Area と Energy loss coefficient

弁口面積推定を行うための式として、Gorlin の式が与えられている[29]。この式によって算出される弁口面積を Gorlin 面積と呼び、収縮期流量 $Q$ [ml/s]、弁前後の圧力勾配 TPG[mmHg]に対して、

$$\text{Gorlin 面積} = \frac{Q}{50\sqrt{TPG}} \quad (4.2)$$

で与えられる。また，上行大動脈移行部の面積を $A_A$ として，

$$\text{Gorlin 面積} = \frac{\text{EOA} \cdot A_A}{A_A - \text{EOA}} \quad (4.3)$$

と表すこともできる。

また，狭窄によって生じるエネルギー損失を反映する量として， $E_L C_O$  (energy loss coefficient) が与えられ，次式で定義される。

$$E_L C_O = \frac{\text{EOA} \cdot A_A}{A_A - \text{EOA}} \quad (4.4)$$

定義式から明らかなように，Gorlin 面積と $E_L C_O$ は数式としては等価である。実際には，TPG をカテーテルで測定した際の Gorlin 面積と，ドップラー心臓超音波探査で測定した EOAを用いて算出した $E_L C_O$ とは完全には一致しないと予想される。

エネルギー損失を反映していることから，面積指標のうち最も優れたものはドップラー心臓超音波探査をもとに算出された $E_L C_O$ であるとされる[26]。しかしながら，Gorlin 面積， $E_L C_O$ のいずれも EOA から算出される値であるため，本研究では GOA と EOA に着目する。

## 4.2 解析モデルの詳細

本研究では，病変のない三尖弁モデルを用いた。三尖弁は，直管状の流体領域内に設置される。流体入口境界面に面内で一様な圧力を印加して流体を運動させる。

### 4.2.1 三尖弁モデル

三尖弁モデルの概形 (メッシュ) を以下に示す。血管は長さ 60mm，直径 24mm である。三尖弁の基部を，血管の入口側から 12~24mm の位置に接合している。弁の厚さは，血管壁との結合部を 1mm，弁縁を 0.5mm，それ以外を 0.4mm とした[30]。

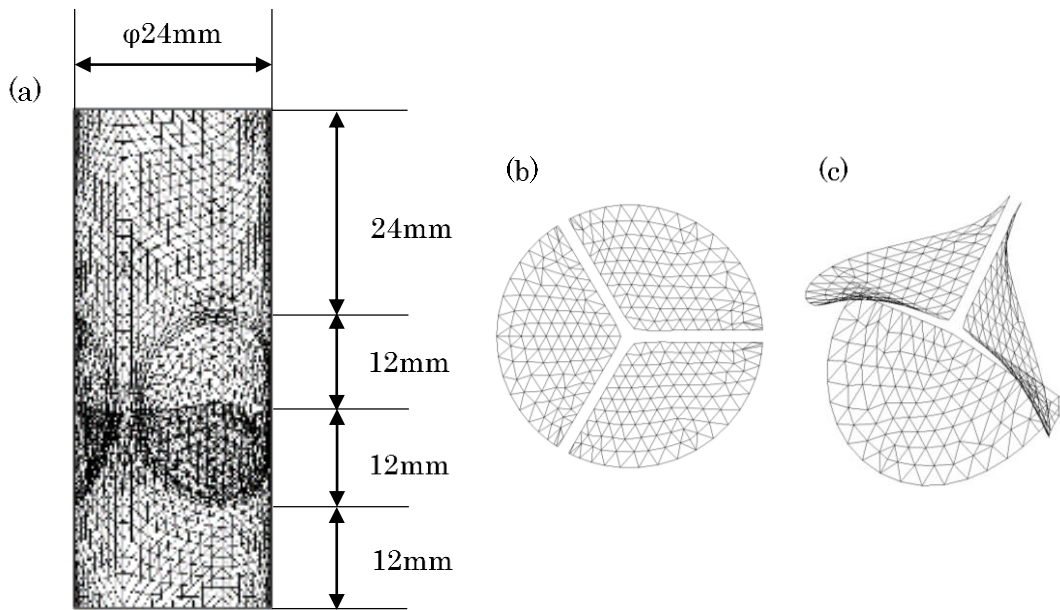


図 4.2 解析モデル概形 (a)血管 (b)三尖弁上面図 (c)三尖弁俯瞰図

また、物性値と繊維方向は次のように設定した。

表 4.1 三尖弁モデルの縦弾性係数および横弾性係数

$E_L$ : 繊維方向の縦弾性係数	$E_T$ : 繊維直交方向の縦弾性係数	$\nu_{LT}$ : ポアソン比	$G_{LT}$ : 横弾性係数
700kPa	233kPa	0.45	80kPa

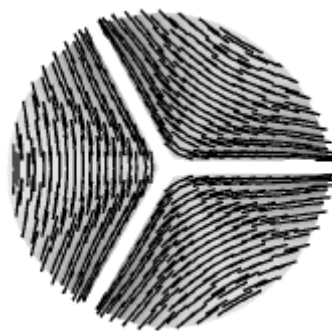


図 4.3 三尖弁の繊維方向 (片山進, “流体構造連成有限要素法による大動脈弁の機能に及ぼす弁葉形状の影響解析,”東京大学修士論文, 2009.[13])

表に示した弾性係数を、以後基準値と呼称する場合がある。

節点数、要素数は次表のとおり。流体部は四面体一次要素、構造部は DKT シェル要素で

ある.

表 4.2 三尖弁モデルの節点数と要素数

	節点数	流体要素数	構造要素数
三尖弁モデル	8594	37321	600

#### 4.2.2 解析条件

入口流体圧力は、左心室から拍出される血液の血圧を参考に決定する。本研究では、大動脈弁の開閉を解析するため、大動脈弁が閉じたままとなる拡張期については解析を行う必要がない。したがって、収縮期血圧のみを模擬し、式(4.5)のように入口流体圧力を設定した。ただし単位は[Pa]である。また圧力波形を図 4.4 に示す。

$$P_{in} = \begin{cases} 16000 - 6000 \times \left(\frac{t-0.1}{0.1}\right)^2 & (0 \leq t \leq 0.1) \\ 16000 - 6000 \times \left(\frac{t-0.1}{0.25-0.1}\right)^2 & (0.1 < t \leq 0.25) \\ 10000 \times \left(1 - \frac{t-0.25}{0.33-0.25}\right) & (0.25 < t \leq 0.33) \end{cases} \quad (4.5)$$

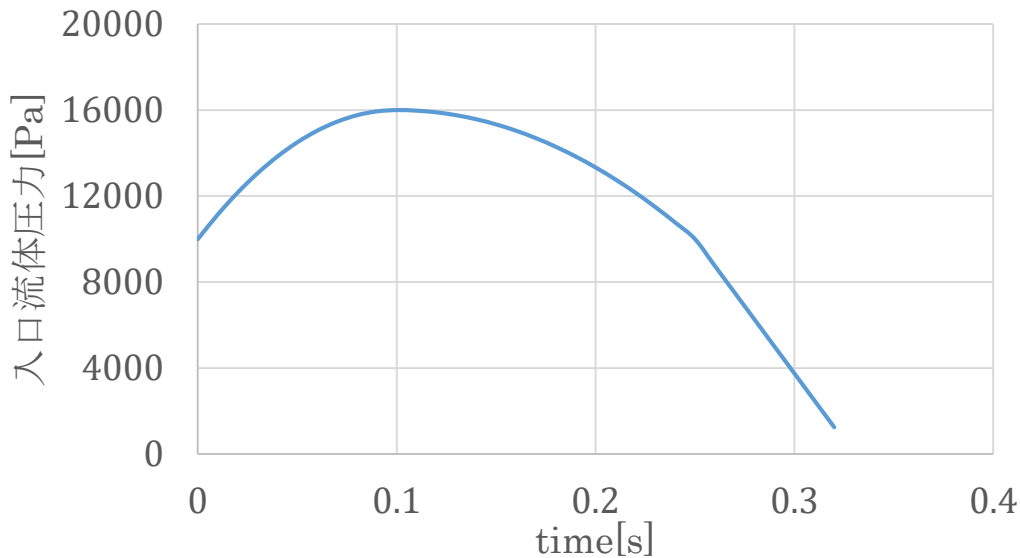


図 4.4 入口流体圧力の時間変化

また、Newmark- $\beta$ 法のパラメータは以下のように設定した。

表 4.3 Newmark- $\beta$  法のパラメータ

$\gamma$	$\beta$
0.6	$\frac{1}{4}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.3025$

Windkesselモデルのパラメータは次のように設定した[13].

表 4.4 Windkessel モデルのパラメータ

R1	R2	C
$1.0 \times 10^7 \text{Pa} \cdot \text{s/m}^3$	$1.6 \times 10^8 \text{Pa} \cdot \text{s/m}^3$	$1.6 \times 10^{-8} \text{Pa} \cdot \text{s/m}^3$

## 4.3 実験計画法による分散分析

GOA と EOA に大きな影響を及ぼすパラメータを特定するため、実験計画法に基づく分散分析を行った。ここでは、入口流体圧力、弁輪サイズ、粘性係数、大動脈弁弾性係数を因子として、2水準系の直交表を用いた。

### 4.3.1 因子の設定

入口流体圧力は、橈骨動脈で測定した値から算出した推定値を解析に用いることを想定し、基準圧力に対して $\pm 5 \text{kPa}$ の圧力差がある場合を水準とした[31][32]。弁輪サイズは、先行研究[12]に倣い、CT解像度(1voxel $\doteq$ 1mm)に由来する不確かさを想定し、弁輪半径が12mmの場合と13.2mmの場合を水準とした。粘性係数は、狭窄柔軟管の解析と同様に、統計的ばらつきを考慮した。大動脈弁弾性係数は、参考文献[33]から、基準値に対して $\pm 30\%$ の差がある場合を水準とした。

以上より、水準は次の表のように設定する。

表 4.5 水準表

因子	水準 1	水準 2
A : 入口流体圧力	基準-0.5kPa	基準+0.5kPa
B : 弁輪サイズ (半径)	12mm	13.2mm
C : 粘性係数	$3.0 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$	$4.0 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$
D : 弾性係数	基準値 $\times 0.7$	基準値 $\times 1.3$

また、直交表は以下のように設定した。交互作用が未知であるため、上記の4因子およびそれぞれの交互作用がエイリアスではなくなるよう配置した。

表 4.6  $L_{16}(2^{15})$ 直交表

	A	B	E	C	F	G	H	D	I	J	K	L	M	N	O
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

このように割り当てたとき、交互作用は、 $E=A \times B$ ,  $F=A \times C$ ,  $I=A \times D$ ,  $G=B \times C$ ,  $J=B \times D$ ,  $L=C \times D$  となる。残りの列 H, K, M, N, O は初めから残差に含まれる。

### 4.3.2 GOA に対する分散分析の結果

因子 A～O に対して, GOA の最大値に関する分散分析を行った結果, 次のようになった.

表 4.7 GOA に対する分散分析の結果

要因	要因変動	自由度	V	F	判定
平均変動	$2.09 \times 10^6$	1	$2.09 \times 10^6$	-	
A	80.8	1	80.8	24.9	**
B	$1.44 \times 10^4$	1	$1.44 \times 10^4$	$4.44 \times 10^3$	**
C	4.56	1	4.56	1.40	
D	$1.80 \times 10^3$	1	$1.80 \times 10^3$	555	**
A×B	6.35	1	6.35	1.96	
A×C	$8.23 \times 10^{-1}$	1	$8.23 \times 10^{-1}$	$2.54 \times 10^{-1}$	
A×D	$1.28 \times 10^{-1}$	1	$1.28 \times 10^{-1}$	$3.93 \times 10^{-2}$	
B×C	18.5	1	18.5	5.71	
B×D	99.2	1	99.2	30.6	**
C×D	6.73	1	6.73	2.07	
e	16.2	5	3.25	-	
計	$2.11 \times 10^6$	16	-	-	

ただし判定は,  $F > 16.26$  が 99%信頼区間,  $F > 6.61$  が 95%信頼区間である. 分散分析表より, A: 入口流体圧力, B: 弁輪サイズ, D: 弾性係数, B×D (弁輪サイズと弾性係数の交互作用) が有意となった. 分散の値が誤差より小さかったものをプーリングすると, 分散分析表は次のようになった.

表 4.8 GOA に対する分散分析の結果 (プーリング後)

要因	要因変動	自由度	V	F	
平均変動	$2.09 \times 10^6$	1	$2.09 \times 10^6$	-	
A	80.8	1	80.8	32.9	**
B	$1.44 \times 10^4$	1	$1.44 \times 10^4$	$5.87 \times 10^3$	**
C	4.56	1	4.56	1.86	
D	$1.80 \times 10^3$	1	$1.80 \times 10^3$	734	**
A×B	6.35	1	6.35	2.59	
B×C	18.5	1	18.5	7.55	*
B×D	99.2	1	99.2	40.4	**
C×D	6.73	1	6.73	2.74	
e	17.2	7	2.45	-	
計	$2.11 \times 10^6$	16	-	-	

ただし判定は、 $F > 12.25$  が 99%信頼区間、 $F > 5.59$  が 95%信頼区間である。プーリングにより、A, B, D, B×Dに加えて、B×C (弁輪サイズと粘性係数の交互作用) が有意となった。



### 4.3.3 分散分析結果の考察 (GOA)

有意であると判定された因子について、水準間平均をプロットした。

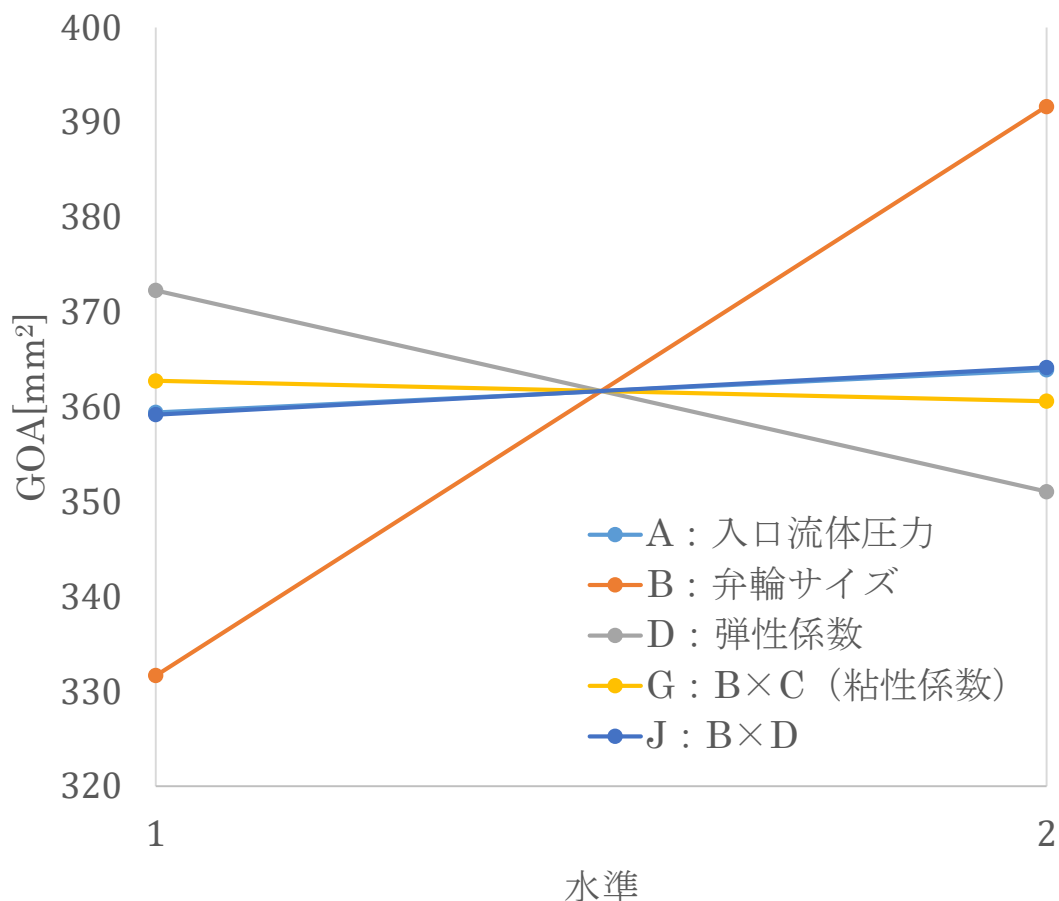


図 4.5 GOA の各因子における水準間平均

入口流体圧力 (A) および弁輪サイズ (B) の増加に対して、GOA は増加した。一方、弾性係数 (D) の増加に対して、GOA は減少した。

入口流体圧力が増加すると、上流側から弁に作用する、弁を押し開こうとする力が増加する。また同時に、弁と大動脈壁面との間で生じる渦も流速を増し、弁が開きにくくなる。グラフから、これら二つの効果のうち、前者が勝っていたことが分かる。

他の条件が変わらない場合、弁輪サイズが増加すると GOA も増加すると考えられる。今回の解析においてはモデル全体の大きさが 1.1 倍となっているため、弁面積は  $1.1^2 = 1.21$  倍となることが予想される。実際、(水準 2 における GOA) / (水準 1 における GOA) =  $392/332 \approx 1.18$  となった。また、分散分析表およびグラフから、弁輪サイズの変化が最も大きく影響していたことがわかる。

弾性係数が増加すれば、弁が動きにくくなり、モデルの初期形状を保とうとすると考えられる。今回の解析では弁が閉じたモデルで解析を行ったため、GOAは弾性係数の増加に対して減少する傾向がみられた。

弁輪サイズ (B) と粘性係数 (C) の交互作用 (B×C) では、B と C がともに大きい、もしくはともに小さい場合に、GOA が大きくなった。弁輪サイズ (B) と弾性係数 (D) の交互作用 (B×D) では、B と D がともに大きい、もしくはともに小さい場合に、GOA が小さくなった。

ただし、交互作用の水準は、両方の値が大きい場合と小さい場合との算術平均がもつ傾向を表している。実際の応答を調べるためには、因子の値を変化させた解析を行う必要がある。

#### 4.3.4 GOA の時間変化

分散分析に用いた解析結果は、GOA の最大値である。GOA が最大となる解析時刻は、入口流体圧力が最大となる  $t=0.1s$ 、あるいは圧力波の遅れを反映してそれより遅い時刻になると予想されたが、実際には、解析 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 で  $t=0.06s$ 、1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 で  $t=0.07s$  となった。以下に、解析 1 における GOA の時間変化をプロットしたグラフを示す。

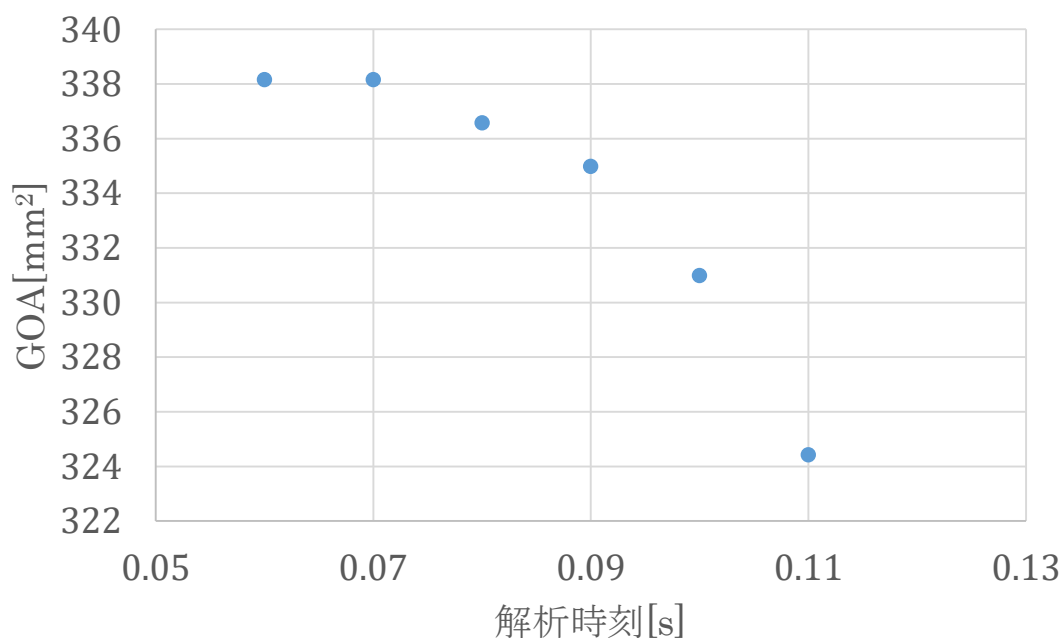


図 4.6 GOA の時間変化の一例

GOA は  $t=0.07$  で最大となり，以降は単調に減少した．GOA が最大になると予想された  $t=0.1s$  においては，すでに GOA が最大値に比べて 2%ほど減少していた．これは，解析時刻  $t=0.06\sim 0.07$  付近において弁と大動脈壁との間で流体が渦を巻き始め，この渦が入口流体圧力の増加によって押されてきた弁を裏側から押し返したためであると考えられる．以下に，解析 1 の  $t=0.07$  および  $t=0.1$  における大動脈壁付近の流れ場を示す．ただし赤い点線が弁の位置を表す．

縮流の左側は，弁の裏側にあたる領域である． $t=0.07$  では，わずかながらこの領域で逆流が生じ始めていることが分かる（図 4.7，丸で囲まれた領域）．また， $t=0.1$  では，弁先端付近まで渦が大きくなっていることが分かる．

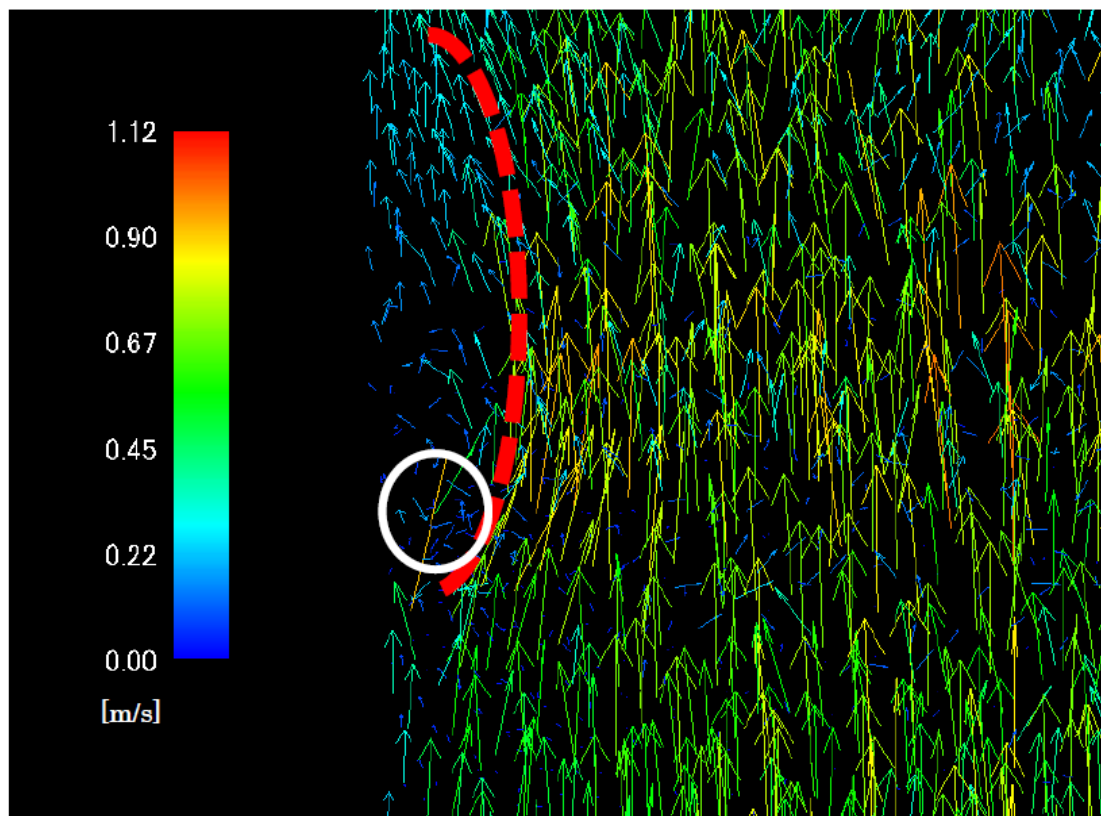


図 4.7  $t=0.07$  における流速ベクトル図

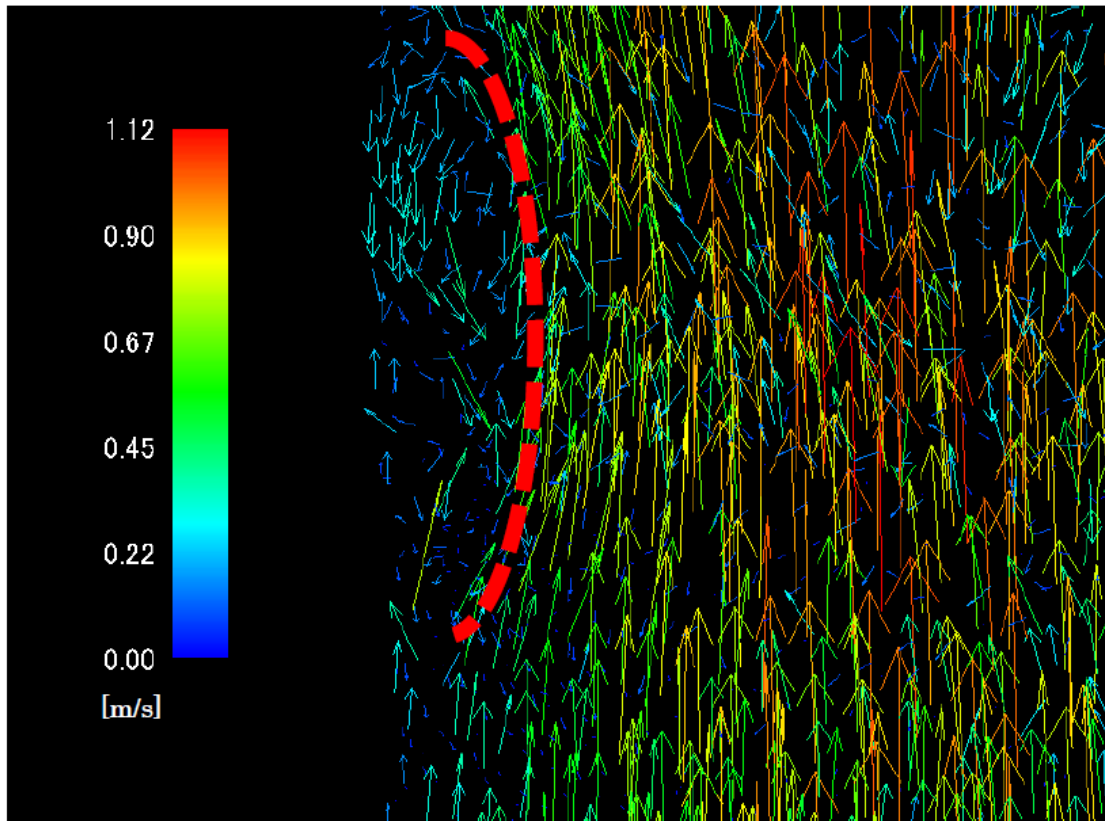


図 4.8  $t=0.1$  における流速ベクトル図

#### 4.3.5 EOA に対する分散分析の結果

EOA は、GOA との比較のため、GOA の最大値を与える時刻における弁先端部近傍（入口側境界から 24mm の位置）において測定した。噴流断面積の定義は参考文献[34][35]をもとに、断面内流速最大値の 10% までの流速をもつ領域の面積とした。

因子 A～O に対して、EOA に関する分散分析を行った結果、次のようになった。

表 4.9 EOA に対する分散分析の結果

要因	要因変動	自由度	V	F	判定
平均変動	$1.94 \times 10^6$	1	$1.94 \times 10^6$	-	
A	12.2	1	12.2	$2.86 \times 10^{-1}$	
B	$1.07 \times 10^4$	1	$1.07 \times 10^4$	251	**
C	4.64	1	4.64	$1.09 \times 10^{-1}$	
D	$1.89 \times 10^3$	1	$1.89 \times 10^3$	44.3	**
A×B	236	1	236	5.53	
A×C	73.3	1	73.3	1.72	
A×D	62.1	1	62.1	1.46	
B×C	71.3	1	71.3	1.67	
B×D	42.1	1	42.1	$9.89 \times 10^{-1}$	
C×D	56.4	1	56.4	1.32	
e	213	5	42.6	-	
計	$1.95 \times 10^6$	16	-	-	

ただし判定は、 $F > 16.26$  が 99%信頼区間、 $F > 6.61$  が 95%信頼区間である。分散分析表より、B：弁輪サイズ、D：弾性係数が有意となった。分散の値が誤差より小さかったものをプーリングすると、分散分析表は次のようになった。

表 4.10 EOA に対する分散分析の結果 (プーリング後)

要因	要因変動	自由度	V	F	判定
平均変動	$1.94 \times 10^6$	1	$1.94 \times 10^6$	-	
B	$1.07 \times 10^4$	1	$1.07 \times 10^4$	314	**
D	$1.89 \times 10^3$	1	$1.89 \times 10^3$	55.5	**
AB	236	1	236	6.94	*
AC	73.3	1	73.3	2.15	
AD	62.1	1	62.1	1.83	
BC	71.3	1	71.3	2.10	
CD	56.4	1	56.4	1.66	
e	272	8	34.0	-	
計	$1.95 \times 10^6$	16	-	-	

ただし判定は、 $F > 11.26$  が 99%信頼区間、 $F > 5.32$  が 95%信頼区間である。プーリングにより、B、D に加えて、 $A \times B$  (入口境界圧力と弁輪サイズの交互作用) が有意となった。

GOA と比べると、入口境界圧力と  $B \times D$  (弁輪サイズと弾性係数の交互作用) が有意でなくなった。

#### 4.3.6 分散分析結果の考察 (EOA)

有意であると判定された因子について、水準間平均をプロットした。

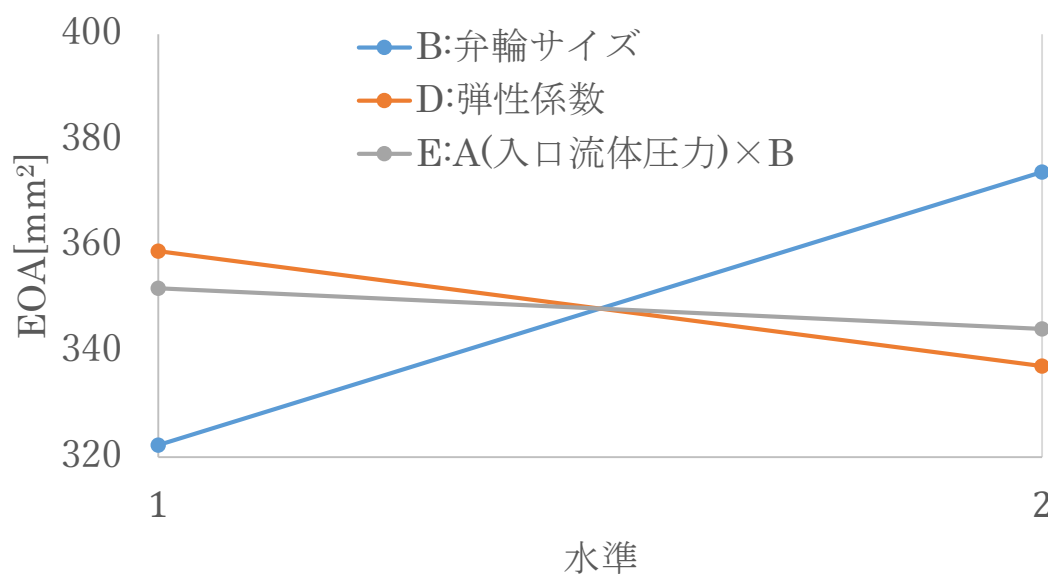


図 4.9 EOA の各因子における水準間平均

弁輪サイズ (B) の増加に対して, EOA は増加した. これは流路の幾何的な断面積 GOA の増加に伴って生じた傾向と考えられる. 同様に, 弾性係数 (D) の増加に伴って EOA が減少したことも, GOA の減少によるものであると考えられる.

また, 入口流体圧力 (A) と弁輪サイズ (B) の交互作用 (A×B) では, A と B がともに大きい, もしくはともに小さい場合に, EOA が大きくなった.

## 4.4 パラメータを変化させた解析

分散分析の結果をもとに、有意と判定されたパラメータの値を変化させた解析を行った。ここでは、GOA の分散分析において交互作用が見られた因子の値を変化させ、応答の詳細を調べる。

### 4.4.1 弁輪サイズと粘性係数の変化に対する GOA の応答

弁輪サイズ $r$ を 12mm, 12.6mm, 13.2mm, 粘性係数 $\mu$ を  $3 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $4 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$  と変化させ、9 通りの解析を行った。図 4.10 に GOA の応答のグラフを示す。

粘性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは、弁輪サイズの変化のほうが GOA により大きな影響を及ぼすことが分かった。また、 $r = 12 \text{mm}$ ,  $12.6 \text{mm}$  のときは  $\mu = 3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$  で GOA が最小 ( $325.4 \text{mm}^2$  および  $355.9 \text{mm}^2$ ) になった。一方で、 $r = 13.2 \text{mm}$  のときは  $\mu = 3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$  で GOA が最大 ( $383.3 \text{mm}^2$ ) になった。

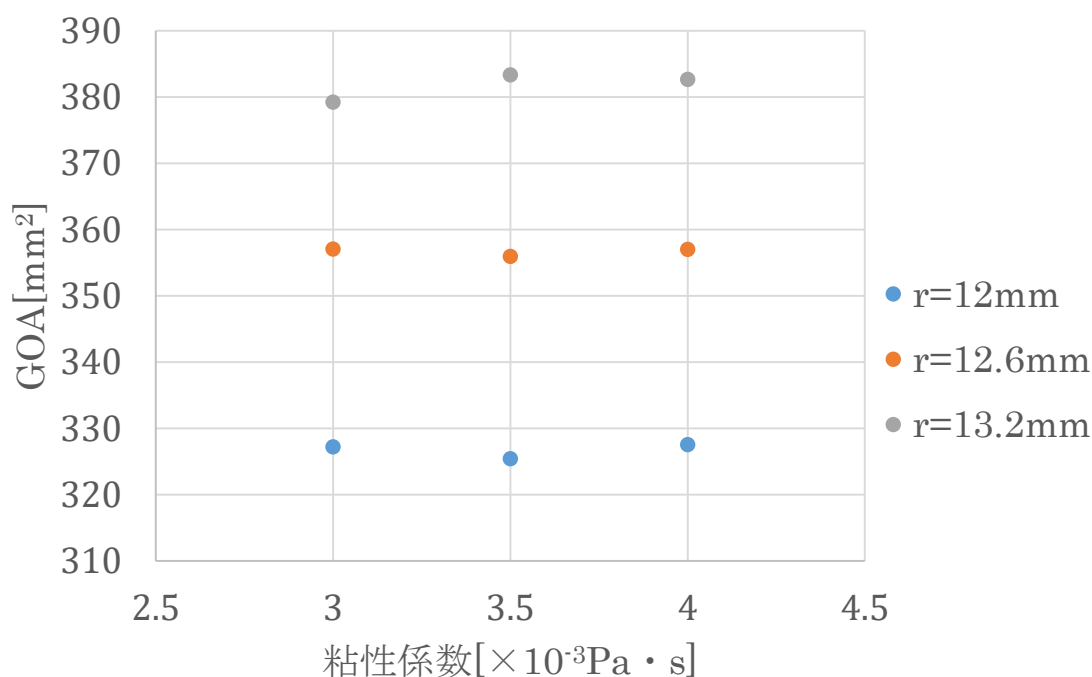


図 4.10 弁輪サイズと粘性係数の変化に対する GOA の応答



#### 4.4.2 弁輪サイズと弾性係数の変化に対する GOA の応答

弁輪サイズ $r$ を 12mm, 12.6mm, 13.2mm, 弾性係数を基準値 $\times 0.7$ ,  $\times 1.0$ ,  $\times 1.3$ と変化させ, 9通りの解析を行った. 粘性係数は $\mu = 3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ とした. 図 4.11 に GOA の応答のグラフを示す.

弾性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは, 弁輪サイズの変化のほうが GOA に大きな影響を及ぼすことが分かった. また, 弾性係数の変化による GOA の変化量は,  $r = 12\text{mm}$ , 12.6mm, 13.2mm の順に大きくなった.

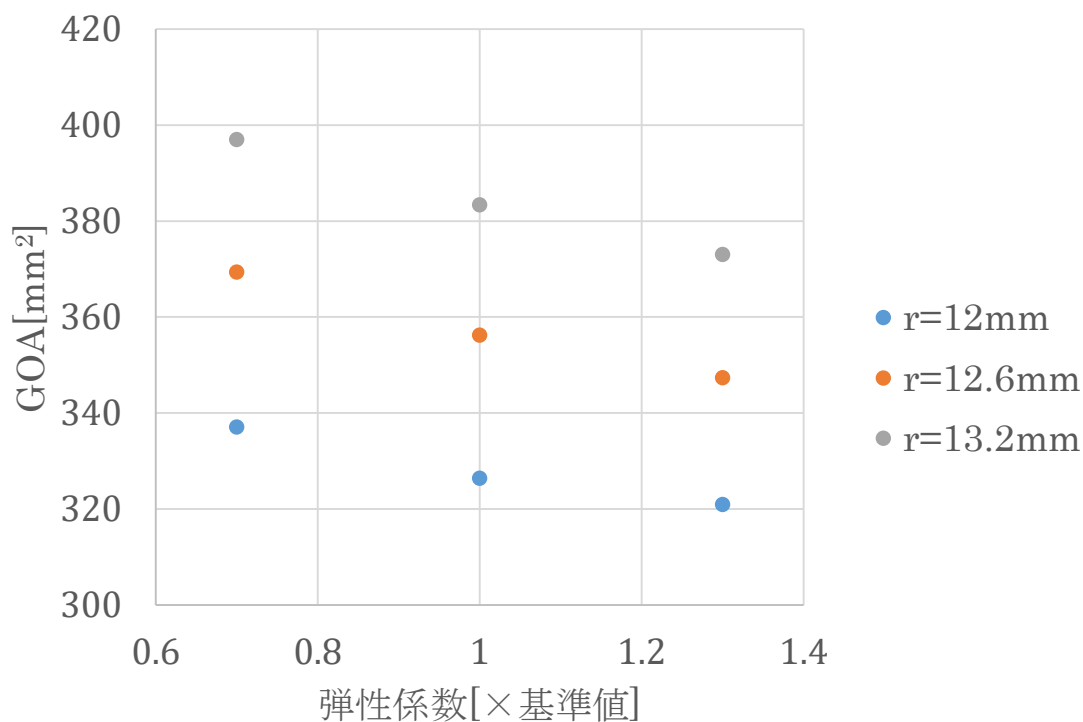


図 4.11 弁輪サイズと弾性係数の変化に対する GOA の応答

#### 4.4.3 弁輪サイズと粘性係数の変化に対する EOA の応答

弁輪サイズ $r$ を 12mm, 12.6mm, 13.2mm, 粘性係数 $\mu$ を  $3 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $4 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$  と変化させ, 9 通りの解析を行った. 図 4.12 に EOA の応答のグラフを示す.

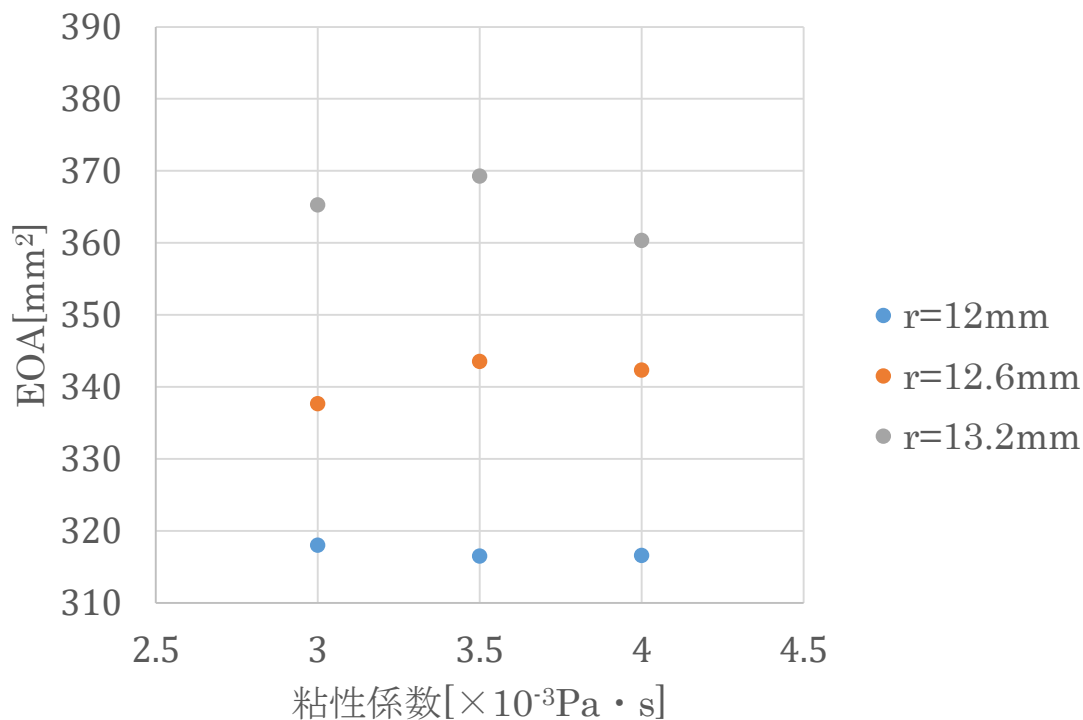


図 4.12 弁輪サイズと粘性係数の変化に対する EOA の応答

$r = 12\text{mm}$ ,  $12.6\text{mm}$ ,  $13.2\text{mm}$  のいずれにおいても, EOA は GOA より小さくなることが確認できた. また, 粘性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは, 弁輪サイズの変化のほうが EOA により大きな影響を及ぼすことが分かった.

#### 4.4.4 弁輪サイズと弾性係数の変化に対する EOA の応答

弁輪サイズ $r$ を 12mm, 12.6mm, 13.2mm, 弾性係数を基準値 $\times 0.7$ ,  $\times 1.0$ ,  $\times 1.3$  と変化させ, 9 通りの解析を行った. 粘性係数は $\mu = 3.5 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ とした. 図 4.13 に GOA の応答のグラフを示す.

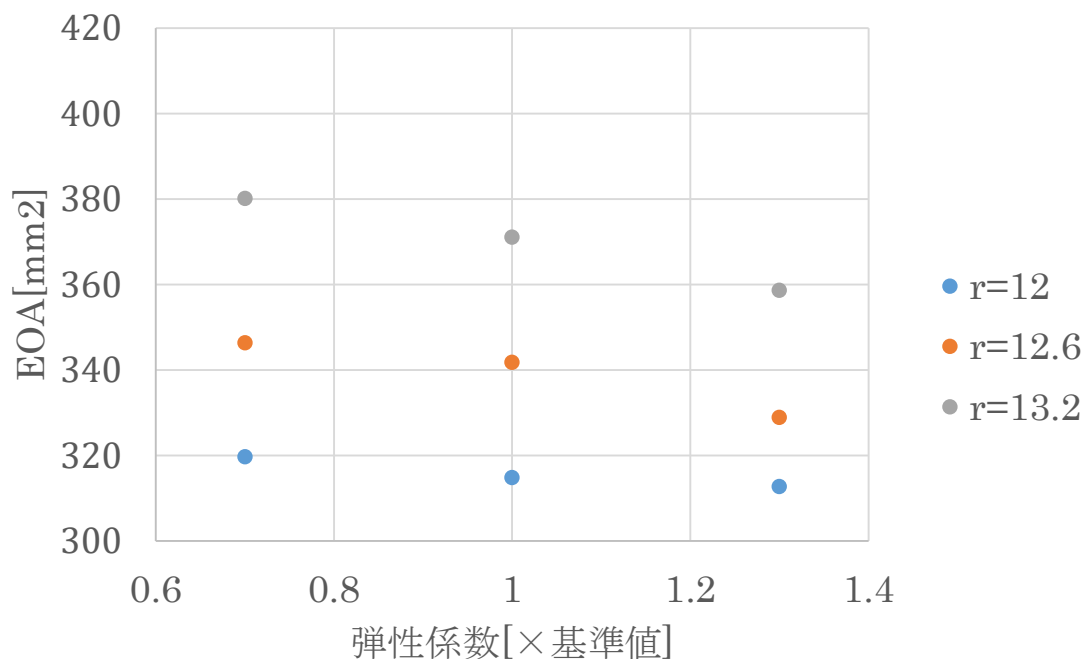


図 4.13 弁輪サイズと弾性係数の変化に対する EOA の応答

$r = 12\text{mm}$ ,  $12.6\text{mm}$ ,  $13.2\text{mm}$  のいずれにおいても, EOA は GOA より小さくなることが確認できた. また, 弾性係数の変化と弁輪サイズの変化とでは, 弁輪サイズの変化のほうが EOA により大きな影響を及ぼすことが分かった.

弾性係数の変化による EOA の変化量は,  $r = 12\text{mm}$ ,  $12.6\text{mm}$ ,  $13.2\text{mm}$  の順に大きくなった.

#### 4.4.5 考察

パラメータを変化させたそれぞれの解析における平均と標準偏差を算出したところ, 次のようになった.

表 4.11 弁輪サイズと粘性係数を変化させた解析における平均と標準偏差

	平均	標準偏差	標準偏差/平均	レンジ
GOA	$355\text{mm}^2$	$22.5\text{mm}^2$	$6.34 \times 10^{-2}$	$57.9\text{mm}^2$
EOA	$341\text{mm}^2$	$19.7\text{mm}^2$	$5.78 \times 10^{-2}$	$52.8\text{mm}^2$

表 4.12 弁輪サイズと弾性係数を変化させた解析における平均と標準偏差

	平均	標準偏差	標準偏差/平均	レンジ
GOA	357mm <sup>2</sup>	24.6mm <sup>2</sup>	$6.89 \times 10^{-2}$	76.0mm <sup>2</sup>
EOA	342mm <sup>2</sup>	23.2mm <sup>2</sup>	$6.78 \times 10^{-2}$	67.4mm <sup>2</sup>

いずれの解析においても GOA の平均値が EOA よりも大きくなり、4.1.2 節で述べた傾向が見られた。また、標準偏差は EOA のほうが小さくなった。分布の広がりを表す指標として標準偏差/平均を計算したところ、いずれの解析においても EOA のほうが小さくなり、より急峻な分布形状になることが示唆された。さらに値のレンジも、EOA がより小さくなった。したがって、弁輪サイズと粘性係数、あるいは弁輪サイズと弾性係数が不確かさをもつ解析においては、EOA のほうが指標としてより頑健であると考えられる。

# 第5章 結論

## 5.1 研究の結論

本研究の目的は、狭窄柔軟管および大動脈弁の流体構造連成解析における不確かさを評価することである。それぞれのモデルに対して生理学的・医学的意味のある評価指標を設定し、実験計画法による分散分析を行った。その結果有意と判定されたパラメータについて、値を変化させた解析を実施し、実際の応答を調べた。結果、不確かさについて次の結論が得られた。

### ・狭窄柔軟管モデルの解析

圧力降下に対して流体密度と粘性係数、およびその相互作用が有意となった。また、粘性係数が小さい場合、圧力降下は粘性係数の増加に伴い、減少する。粘性係数が大きい場合、圧力降下はほぼ一定となる。したがって、流体の粘性係数によって解析の不確かさが著しく変化すると考えられる。

確率有限要素法解析を行い、粘性係数の不確かさに対する圧力降下の応答を再現した。

### ・大動脈弁モデルの解析

GOA に対しては、流体入口圧力、弁輪サイズ、弾性係数、弁輪サイズと弾性係数の交互作用、弁輪サイズと粘性係数の交互作用が有意となった。EOA に対しては、弁輪サイズ、弾性係数、流体入口圧力と弁輪サイズの交互作用が有意となった。

いずれの分散分析においても、弁輪サイズの  $F$  値が最大となった。したがって、大動脈弁モデルの解析に影響する不確かさのうち、血管および弁形状の作成に由来する不確かさが支配的である。

有意となったパラメータの値を変化させた解析では、GOA よりも EOA のほうが不確かさが小さくなる傾向が見られた。したがって、シミュレーションによる評価値として EOA がより有用であると考えられる。

## 5.2 展望

狭窄柔軟管モデルの解析では狭窄前部の壁面せん断応力に着目したが、実際の狭窄血管では、狭窄部から狭窄後流の血管壁にはたらく壁面せん断応力も生理学的な関心の対象となる。そのため、今後は狭窄後流で生じる壁面せん断応力を（時間積分などによって）適切に評価し、その不確かさについて議論することが考えられる。

大動脈弁モデルの解析では、GOA と EOA に着目したが、臨床応用を視野に入れて解析

を行う場合、AVA 以外にも圧力降下や応力分布など、検討する意義のある値は多く存在する。今後は他の指標についても不確かさに関する議論を深めていくことが望まれる。また、本研究で用いたプログラムでは **Reconnecting** によるメッシュ制御を行っていたが、そのために収束条件が時間発展とともに厳しくなり、長時間の解析を行うことが困難になっていた。長時間の解析を行うため、適宜節点数を調整するアルゴリズムの実装が必要である。

## 参考文献

- [1] 厚生労働省, “死因簡単分類別にみた性別死亡数・死亡率（人口10万対）,” 2018.
- [2] S. A. and D. Giddens., “Velocity measurement in steady flow through axisymmetric stenoses at moderate Reynolds number.,” *J. Biomech.*, vol. 16, pp. 505–16, 1983.
- [3] S. A. Ahmed and D. P. Giddens, “Flow disturbance measurements through a constricted tube at moderate Reynolds numbers,” *J. Biomech.*, vol. 16, no. 12, pp. 955–963, 1983.
- [4] S. A. Ahmed and D. P. Giddens, “Pulsatile poststenotic flow studies with laser Doppler anemometry,” *J. Biomech.*, vol. 17, no. 9, pp. 695–705, 1984.
- [5] F. Ghalichi, X. Deng, A. De Champlain, Y. Douville, M. King, and R. Guidoin, “Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses,” *Biorheology*, vol. 35, no. 4, 5, pp. 281–294, 1998.
- [6] M. Jahangiri, M. Saghafian, and M. R. Sadeghi, “Numerical study of turbulent pulsatile blood flow through stenosed artery using fluid-solid interaction,” *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2015, 2015.
- [7] M. A. Nicosia, R. P. Cochran, D. R. Einstein, C. J. Rutland, and K. S. Kunzelman, “A coupled fluid-structure finite element model of the aortic valve and root,” *J. Heart Valve Dis.*, vol. 12, no. 6, p. 781–789, 2003.
- [8] C. J. Carmody, G. Burriesci, I. C. Howard, and E. A. Patterson, “An approach to the simulation of fluid-structure interaction in the aortic valve,” *J. Biomech.*, vol. 39, no. 1, pp. 158–169, 2006.
- [9] G. Tasca *et al.*, “Aortic Root Biomechanics After Sleeve and David Sparing Techniques: A Finite Element Analysis,” *Ann. Thorac. Surg.*, vol. 103, no. 5, pp. 1451–1459, 2017.
- [10] D. Sodhani *et al.*, “Fluid-structure interaction simulation of artificial textile reinforced aortic heart valve: Validation with an in-vitro test,” *J. Biomech.*, vol. 78, pp. 52–69, 2018.
- [11] G. Luraghi *et al.*, “Evaluation of an aortic valve prosthesis: Fluid-structure interaction or structural simulation?,” *J. Biomech.*, vol. 58, pp. 45–51, 2017.
- [12] J. Brüning, F. Hellmeier, P. Yevtushenko, T. Kühne, and L. Goubergrits, “Uncertainty Quantification for Non-invasive Assessment of Pressure Drop Across a Coarctation of the Aorta Using CFD,” *Cardiovasc. Eng. Technol.*, vol. 9, no. 4, pp. 582–596, 2018.
- [13] 片山進, “流体構造連成有限要素法による大動脈弁の機能に及ぼす弁葉形状の影響解析,” 2009.

- [14] S. A. Berger and L.-D. Jou, “Flows in Stenotic Vessels,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 32, no. 1, pp. 347–382, 2000.
- [15] 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会編, 続・有限要素法による流れのシミュレーション. シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- [16] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih, “Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 95, no. 2, pp. 221–242, 1992.
- [17] M. Bern and D. Eppstein, “Mesh generation and optimal triangulation,” *Comput. Euclidean Geom.*, vol. 1, pp. 23–90, 1992.
- [18] 中村義作, よくわかる実験計画法. 1997.
- [19] 山田秀, 実験計画法 方法編—基盤の方法から応答曲面法, タグチメソッド, 最適計画まで. 日科技連出版社, 2004.
- [20] 中桐滋, “確率有限要素法,” 応用数理, vol. 2, no. 2, pp. 131–143, 1985.
- [21] 中桐滋, 久田俊明, “確率有限要素法入門.” 1985.
- [22] 化学大辞典編集委員会編, 化学大辞典 第3巻. 共立出版, 1964.
- [23] 浅見高, プラスチック材料講座12 アクリル樹脂. 日刊工業新聞社, 1970.
- [24] S. S. Varghese, S. H. Frankel, and P. F. Fischer, “Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 1. Steady flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 582, pp. 253–280, 2007.
- [25] B. R. Kwak *et al.*, “Biomechanical factors in atherosclerosis: Mechanisms and clinical implications,” *Eur. Heart J.*, vol. 35, no. 43, pp. 3013–3020, 2014.
- [26] D. Garcia and L. Kadem, “What Do You Mean By Aortic Valve Area: Geometric Orifice Area, Effective Orifice Area, or Gorlin Area?,” *J. Heart Valve Dis.*, vol. 15, no. 5, pp. 601–608, 2006.
- [27] P. B. Bertrand *et al.*, “Effective Orifice Area during Exercise in Bileaflet Mechanical Valve Prostheses,” *J. Am. Soc. Echocardiogr.*, vol. 30, no. 4, pp. 404–413, 2017.
- [28] D. Garcia *et al.*, “Estimation of aortic valve effective orifice area by Doppler echocardiography: Effects of valve inflow shape and flow rate,” *J. Am. Soc. Echocardiogr.*, vol. 17, no. 7, pp. 756–765, 2004.
- [29] R. Gorlin and S. G. Gorlin, “Hydraulic formula for calculation of the area of the stenotic mitral valve, other cardiac valves, and central circulatory shunts. I,” *Am. Heart J.*, vol. 41, no. 1, pp. 1–29, 1951.
- [30] Y. Sahasakul, W. D. Edwards, J. M. Naessens, and A. J. Tajik, “Age-related changes in aortic and mitral valve thickness: Implications for two-dimensional echocardiography based on an autopsy study of 200 normal human hearts,” *Am. J. Cardiol.*, vol. 62, no. 7, pp. 424–430, 1988.
- [31] 河野雄平監修 O'Rourke, Michael, “中心血圧と末梢血圧の違い,” *Arter. Stiffness*, vol.



- 15, pp. 16–19, 2009.
- [32] A. L. Pauca, M. F. O'Rourke, and N. D. Kon, "Prospective evaluation of a method for estimating ascending aortic pressure from the radial artery pressure waveform," *Hypertension*, vol. 38, no. 4, pp. 932–937, 2001.
- [33] M. Thubrikar, W. C. Piepgrass, L. P. Bosher, and S. P. Nolan, "The elastic modulus of canine aortic valve leaflets in vivo and in vitro," *Circ. Res.*, vol. 47, no. 5, pp. 792–800, 1980.
- [34] L. Bogusławski and C. O. Popiel, "Flow structure of the free round turbulent jet in the initial region," *J. Fluid Mech.*, vol. 90, no. 3, pp. 531–539, 1979.
- [35] 鬼頭みずき, 社河内敏彦, "軸対称噴流の流動特性に対するノズル形状の影響," 研究紀要, no. 45, pp. 19–24, 2009.

# 謝辞

修士論文制作に際しご助力頂いた方々に，感謝の意を申し上げます。

泉聡志教授には 3 年間大変お世話になりました。学会発表や研究会発表の際，研究内容から発表資料に至るまで多くの点でご助言，ご指導を頂きました。

波田野明日可講師には研究の方針や具体的な作業面でのご指導を頂きました。至らぬ点もありお手を煩わせてしまうことが多かったかと存じます。微力ながらも御恩返しが出来ていたら幸いです。

高本聡助教には研究会発表の質疑で非常に意義深いご指摘を頂くことが幾度もありました。また，研究室生活もサポートして頂きました。

その他の学生・研究員の皆様にもお力添えを頂きました。また，生活面で支えてくれた家族にもこの場をお借りして感謝します。

2019 年 2 月

鈴木 一真

以上