

修士論文

マルチスケールモデルによる
タイヤゴムの摩擦係数予測

p.1 – p.99 完

2012年2月10日提出

指導教員 酒井 信介 教授

106193 熊沢 卓

目次

1	序論	9
1.1	研究の背景	10
1.2	従来の研究	11
1.3	研究の目的	12
1.4	本論文の構成	13
2	タイヤ - 路面間の摩擦理論	14
2.1	摩擦現象のマルチスケール性	15
2.2	接触理論	16
2.3	すべり摩擦	25
3	路面表面粗さパワースペクトル	31
3.1	表面粗さパワースペクトルの定義	32
3.2	セルフアフィンフラクタル表面	33
3.3	路面サンプルの表面粗さパワースペクトル	34
3.3.1.	表面高さデータの計測	34
3.3.2.	路面サンプル	35
3.3.3.	表面粗さパワースペクトルの計算	37
4	ゴムの粘弾性特性	39
4.1	タイヤゴムにとっての粘弾性特性	40
4.2	バネ・ダンパモデルによる粘弾性特性の表現	41
4.3	摩擦試験用ゴム試験片の粘弾性特性	43
5	摩擦試験	45
5.1	試験目的	46
5.2	摩擦試験の概要	46
5.3	加速試験	47
6	摩擦係数予測	49
6.1	Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 q_1 依存性	50
6.1.1.	計算条件	50
6.1.2.	計算結果	52
6.2	弾性エネルギー密度を考慮した摩擦モデル	54
6.2.1.	ゴムに蓄積されるエネルギー	54
6.2.2.	弾性エネルギー密度の導出	56
6.2.3.	弾性エネルギー密度の計算	59
6.2.4.	考察	62
6.3	摩擦モデルの数値計算による検討	63
6.3.1.	計算条件	63

6.3.2.	真実接触領域の割合の計算	63
6.3.3.	摩擦係数の計算.....	66
6.4	摩擦試験と摩擦モデル計算の比較・検証.....	68
6.5	ヒステリシス項以外の摩擦係数項の検証.....	70
6.5.1.	検証方法.....	70
6.5.2.	検証結果.....	70
7	考察と今後の展望.....	72
7.1	考察.....	73
7.2	今後の展望.....	74
8	結論.....	75
付録 A:	剛性マトリクス M の導出.....	77
付録 B:	パワースペクトル関係式の導出.....	88
付録 C:	摩擦係数の垂直応力依存性.....	89
付録 D:	カットオフ波数 q_1 一定の摩擦係数.....	90
付録 E:	異なるゴム試験片の摩擦係数.....	92
	謝辞.....	95
	参考文献.....	97

図目次

Fig. 1-1 Simulation of tire property (株式会社ブリヂストン提供).....	10
Fig. 2-1 A rubber block squeezed against a hard, rough, substrate.....	15
Fig. 2-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate.....	16
Fig. 2-3 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).....	26
Fig. 2-4 The energy dissipated during the time period t_0 (micro).....	26
Fig. 3-1 The surface roughness power spectrum of a surface which is a self-affine fractal for $q_0 < q < q_1$	33
Fig. 3-2 Laser microscope.....	34
Fig. 3-3 (a) Safety-Walk type B, (b) Sandpaper P60.....	35
Fig. 3-4 Surface image of Surface A : (a) $\times 10$, (b) $\times 100$	36
Fig. 3-5 Surface image of Surface B : (a) $\times 10$, (b) $\times 100$	36
Fig. 3-6 The Surface roughness power spectrum of surface A (used).....	38
Fig. 3-7 The Surface roughness power spectrum of surface B (used).....	38
Fig. 4-1 The relation between viscoelasticity and other properties[23].....	40
Fig. 4-2 (a) Voigt・Kelvin Model, (b)Maxwell Model.....	42
Fig. 4-3 Generalized Maxwell Model.....	42
Fig. 4-4 Test piece.....	43
Fig. 4-5 The complex modulus of elasticity.....	44
Fig. 5-1 The friction testing machine (株式会社ブリヂストン提供).....	46
Fig. 5-2 Results of accelerating friction tests (株式会社ブリヂストン提供).....	48
Fig. 6-1 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface A.....	53
Fig. 6-2 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface B.....	53
Fig. 6-3 The elastic energy density stored in the deformation field in the rubber.....	55
Fig. 6-4 Elastic energy density of a rubber sliding on surface A.....	60
Fig. 6-5 Elastic energy density of a rubber sliding on surface B.....	60
Fig. 6-6 Elastic energy density as a function of ζ at $v=1$ [mm/s].....	61
Fig. 6-7 Elastic energy density as a function of ζ at $v=10$ [mm/s].....	61
Fig. 6-8 (a) The fraction of real contact area for surface A, (b) the magnification of the insert area of (a).....	64
Fig. 6-9 (a) The fraction of real contact area for surface B, (b) the magnification of the insert area of (a).....	65
Fig. 6-10 Maximum magnification for sliding velocity.....	67
Fig. 6-11 Numerical results of friction coefficient.....	67
Fig. 6-12 Results of accelerating friction tests.....	69
Fig. 6-13 Numerical results of friction coefficient.....	69

Fig. 6-14 Experimental and numerical results of friction coefficient.....	71
Fig. 6-15 Macro term of friction coefficient.	71
Fig. C-1 Numerical results of friction coefficient with various normal stress.....	89
Fig. D-1 Numerical results of friction coefficient with constant q_1	91
Fig. E-1 The complex modulus of elasticity (Rubber2).	92
Fig. E-2 Numerical results of friction coefficient of Rubber2.....	93
Fig. E-3 Comparison of friction coefficient between Rubber1 and Rubber2 (Surface A).	94
Fig. E-4 Comparison of friction coefficient between Rubber1 and Rubber2 (Surface B).	94

表目次

Table 3-1 Conditions of the measurements.	34
Table 3-2 Surface properties.	37
Table 4-1 Test piece properties.	43
Table 5-1 Conditions of accelerating friction tests.....	47
Table 6-1 Calculation conditions of friction coefficient.	51
Table 6-2 Relation between maximum magnification and minimum wavelength.	52
Table 6-3 Calculation conditions of elastic energy density.	59
Table 6-4 The maximum magnification conformed to the experimental data.	62
Table 6-5 Calculation conditions of friction coefficient.	63
Table C-1 Calculation conditions of friction coefficient with several normal stress.....	89
Table D-1 Calculation conditions of friction coefficient with constant q_1	90
Table E-1 Properties of rubber 2.	92
Table E-2 Calculation conditions of friction coefficient with different test pieces.	93

1 序論

1.1 研究の背景

タイヤは唯一路面に接して車両を支える重要な機械要素であり，その摩擦係数は車両自体の性能を左右する重要な因子となる．タイヤの摩擦係数は一般的に路面の表面特性やゴムの粘弾性特性などによって定められ，すべり速度に顕著に依存することが知られている[1]．このように，タイヤの摩擦現象は様々な特性に依存する非常に複雑な現象であり，モデル化は容易ではない．

タイヤの摩擦現象を複雑にしている大きな要因の 1 つとして，路面粗さのマルチスケール性が挙げられる．従来の路面モデルでは単一のスケールで見た路面表面粗さのみを考えていた[2][3]が，実際の路面は様々なスケールの粗さが複雑に存在している．そのため，タイヤ-路面間の摩擦力や摩擦係数を正確に推定するためには，路面粗さのスケールを跨いだ統計的扱いが不可欠である．

タイヤの摩擦現象を複雑化しているもう 1 つの要因として，ゴムの粘弾性特性が挙げられる．粘弾性特性はゴムの分子鎖の挙動や，ポリマーと充てん剤の相互作用などに起因しており，その原理の解明，変形挙動の正確な表現を目指し，多くの研究が行われてきた[4]-[6]．ゴムのような高分子材料を使用した製品の開発においては，この粘弾性特性を考慮した解析が重要となる．

このように，現状ではタイヤ-路面間の摩擦現象を正確に記述し，摩擦係数を予測することは困難である．しかし，企業におけるタイヤ設計のためのシミュレーション (Fig. 1-1 参照) は実際上不可欠なものであり，そこでは摩擦係数の設定が重要な問題となる．そのため，タイヤの研究開発において摩擦係数の設定は実験値を用いているのが現状である．しかし，実験によって得られた摩擦係数では解析精度に問題があり，その上実験は大きな費用と時間を要する．そのため，摩擦係数を正確に予測できるような数理モデルを構築し，様々な条件下での摩擦係数を理論的に求めることができれば，タイヤ開発におけるコスト削減・開発期間の短縮・シミュレーション精度の向上が期待できる．

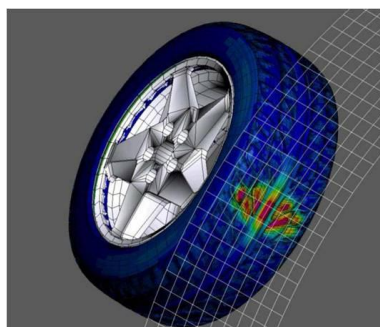


Fig. 1-1 Simulation of tire property (株式会社ブリヂストン提供).

1.2 従来の研究

よく知られた Amontons の法則[7]によれば, 2 固体間のマクロの摩擦力 F_f は荷重 L に比例し, $F_f = \mu L$ を満たす. ここで, μ はマクロな摩擦係数であり, F_f は見かけの接触面積に依らない. その後, 真実接触領域についての考察[8]から, 摩擦力が真実接触面積に比例することが示された. これまでに, 様々な曲率半径の完全に滑らかな表面に対して, 摩擦特性を明らかにするための実験やシミュレーションが行われた[9].

しかし, タイヤ-路面間のようなゴムの摩擦は, 多くの点で他の固体間の摩擦特性とは異なる挙動を示すため, 滑らかな表面同士の摩擦理論を適用することは難しい. その摩擦特性の違いは, 広い周波数帯域で見られるゴムの非常に低い弾性率と大きい内部摩擦に起因している. ゴムの内部摩擦に起因する摩擦力を評価するためには, 表面の粗さによるゴムの変形を考えなければならない. そこで, Persson は単一の粗さを持つ理想化された表面に対するゴムの摩擦理論を構築した[10][11]. その後, Persson は実際の路面が不規則に粗い表面を持つことに着目し, さまざまなスケールの粗さを考慮した摩擦モデルを提出した[12][13]. この摩擦モデルによれば, 路面表面粗さパワースペクトルとゴムの粘弾性特性からゴムのヒステリシスロスに起因するゴム-路面間の摩擦係数を計算することができる. さらに, Persson は, 摩擦によるゴムの局所的加熱 (flash temperature) を取り入れ, より正確な摩擦係数の導出を試みた[14]. また, 表面間の凝着力についても接触理論に基づいた評価を行った[15][16]が, 路面の粗さにおいては凝着の効果はほぼ無視できるとして摩擦モデルに凝着の効果は取り入れられていない.

上記のように, タイヤのゴム-路面間の摩擦係数を理論的に予測するにあたり, Persson の理論は有効な手段であると考えられる. ただし, Persson の理論ではどこまで小さいスケールを考慮するかについての考察が不足しており, ミクロ領域で起こる素過程を考慮に入れたモデル化が必要である.

1.3 研究の目的

本研究の目的は、摩擦係数を理論的に計算・予測するための摩擦モデルを構築することである。具体的には、路面のさまざまなスケールの粗さを考慮した B.N.J.Persson の摩擦モデルを基に、実際の路面粗さデータや粘弾性データを用いた計算を行うことで摩擦係数を導出する。その際、ミクロスケールのゴムの挙動に対するモデルを導入することによって、実際の実験と対応した実用上有効な摩擦係数の導出を目指す。

1.4 本論文の構成

本論文の構成を示す。

第1章「序論」

本研究の背景，従来の研究，研究の目的について述べる。

第2章「タイヤ-路面間の摩擦理論」

タイヤ-路面間の摩擦について，概要を述べ，本研究で用いる Persson の接触理論・摩擦理論について説明する。

第3章「路面表面粗さパワースペクトル」

路面表面粗さパワースペクトルについて，定義と一般的性質を説明し，実際の表面粗さパワースペクトルデータを示す。

第4章「ゴムの粘弾性特性」

ゴムの粘弾性特性について，摩擦に対する重要性と数学的表現方法について述べ，摩擦試験用ゴム試験片の複素弾性率を示す。

第5章「摩擦試験」

すべり速度・路面条件を変えて行った摩擦試験について述べる。

第6章「摩擦係数予測」

ミクロスケールのゴムの挙動を考慮した摩擦モデルを構築し，そのモデルに基づいた摩擦係数の計算について述べる。また，摩擦試験結果と計算結果の比較・検証を行う。

第7章「考察と今後の展望」

本研究の摩擦モデルによる摩擦係数予測に対する考察と今後の展望について述べる。

第8章「結論」

本研究の結論を述べる。

2 タイヤ - 路面間の摩擦理論

2.1 摩擦現象のマルチスケール性

ゴムと固く粗い路面間の摩擦力は、主として、接触表面間の相互作用により生じる凝着(粘着)項と、ゴムが路面上の凹凸により周期的な変形を行う際に発生するエネルギーロスに起因するヒステリシス項が含まれることが知られている。本章では、ゴムと固く粗い路面間の摩擦において特に重要であるヒステリシス項について、B.N.J.Persson の摩擦モデル[12]を説明する。

路面表面の凹凸はあらゆるスケールで存在する (Fig. 2-1 参照)。例えば、あるスケールで見た凹凸の表面を拡大すると、そこにもまた凹凸が存在する。このような凹凸は分子スケールまで存在する。Persson はあらゆるスケールの路面粗さの摩擦力に対する寄与を全て考慮することで、任意の粗さを持つ路面に対するゴムの摩擦理論を構築した。つまり、摩擦力を、路面表面のあらゆるスケールの凹凸によるエネルギーロスの積算と等価と考えた。ただし、Persson の理論の実際の系への適用においては、ある大きさより小さいスケールの表面粗さの影響は無視される。この点については、6章で詳しく述べる。

タイヤに用いられる材料特性に対する解析においては、充てん剤とポリマーの相互作用に対する TEM 画像を用いた研究[17]や、分子鎖網目モデルによる粘弾性応答シミュレーション[18]のような分子鎖レベルの現象の解析が行われている。さらに、分子動力学シミュレーションを用いた分子スケールでの摩擦現象の解析[19]も行われている。また、高分子の様々なスケールの現象を組み合わせてシミュレーションを行うソフトウェアの開発も進められている[20][21]。マクロスケールにおいては、表面形状が摩擦に及ぼす影響の有限要素法による解析[22]が行われている。このように、摩擦はさまざまなスケールで起こる現象が複雑に重なり合って起こる現象であり、そのため、摩擦力や摩擦係数を正確に予測・評価することは非常に困難である。本研究では、タイヤ設計における性能予測において実用上有効な手法として、Persson のモデルに基づく摩擦係数予測手法を提案する。

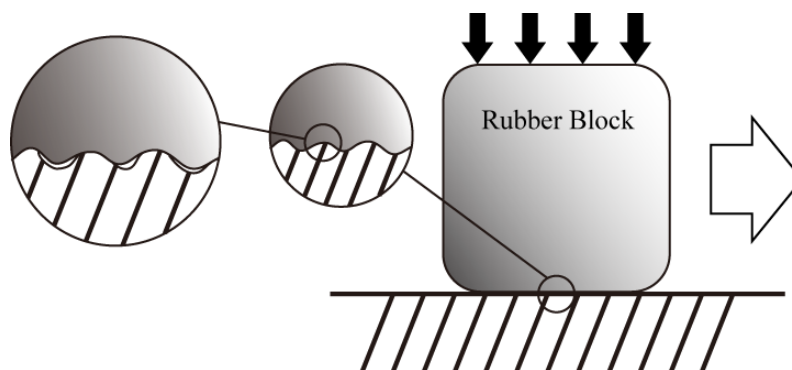


Fig. 2-1 A rubber block squeezed against a hard, rough, substrate.

2.2 接触理論

平らな表面を持つゴムブロックが、粗い路面表面に押しつけられている状態を考える。このとき、見かけ上ゴムの表面全体が路面に接触しているが、観察倍率を上げ、より詳細に見ると、そこには接触部と非接触部が混在している。さらにその接触部を拡大して見ると、その中にも接触部と非接触部が混在している (Fig. 2-2 参照)。このように見かけ上の接触領域は観察倍率によって変化し、最終的な真の接触領域は見かけの接触領域よりも非常に小さくなる。

Persson の摩擦理論においては路面の凹凸を波数空間で表す。つまり、摩擦力を路面の凹凸の波長の大きさごとに求める。波数は観察倍率に対応し、より大きい波数（より小さい波長）の凹凸ほど観察倍率は大きい。ここで、ある波数の路面凹凸の摩擦力への寄与を考えると、実際にゴムの変形をもたらす、摩擦力に寄与するのは、その波数に対応する観察倍率において、見かけ上ゴムと路面が接触している部分のみである。そこで、波数 q における見かけ上の接触領域の割合 $P(q)$ を考慮することによって、各スケールの凹凸による摩擦力を正しく見積もることが可能となる。 $P(q)$ は次のように定義される。

$$P(q) = \frac{A(\zeta)}{A_0}, \quad (2.1)$$

ここで、 A_0 は公称接触領域、 $A(\zeta)$ は倍率 ζ における見かけ上の接触領域である。また、 $q = q_0 \zeta$ 、 q_0 は低波数ロールオフであり、 q が最も小さい波数 q_0 の ζ 倍の波数であるというを示している。本節では、この $P(q)$ の導出を説明する。

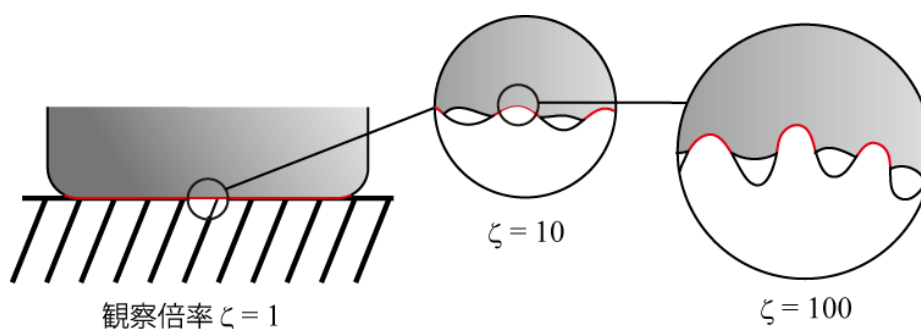


Fig. 2-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate.

ゴムブロックと路面の接触において、 A_0 を公称接触領域（倍率 $\zeta = 1$ での見かけの接触領域）とすると、全荷重 F_N は次式のように表される。

$$F_N = \sigma_0 A_0,$$

ここで、 σ_0 は公称垂直応力である。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ を考える。ここで、 L は公称接触領域の直径である。 $q_0 = 2\pi/L$ と定義すると、 $q = q_0\zeta$ より、

$$P(q) = P(q_0\zeta) \equiv P(\zeta).$$

倍率 ζ における見かけの接触領域の平均垂直応力を $\langle\sigma\rangle_\zeta$ と書けば、全荷重は常に一定であるので、

$$\sigma_0 A_0 = \langle\sigma\rangle_\zeta P(\zeta) A_0.$$

よって、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\langle\sigma\rangle_\zeta}. \quad (2.2)$$

したがって、 $P(\zeta)$ を求めるためには、まず $\langle\sigma\rangle_\zeta$ を求めなければならない。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ での応力の確率分布を $P(\sigma, \zeta)$ と書けば、

$$\langle\sigma\rangle_\zeta = \frac{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.3)$$

よって、式(2.3)を式(2.2)に代入して、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0 \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.4)$$

あるスケールにおいて、見かけ上の接触領域ではゴムと路面は完全に接触していると仮定すると、

$$P(\sigma, \zeta) = \langle\delta(\sigma - \sigma_1(\mathbf{x}))\rangle,$$

ここで、 $\sigma_1(\mathbf{x})$ は倍率 ζ でかかる垂直応力である。 $\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均を表し、次式のように定義される。

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_0} \int d^2x f(x).$$

$\sigma_1 + \Delta\sigma$ を、長さスケール $L/(\zeta + \Delta\zeta)$ における垂直応力とすると、

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \langle \delta(\sigma - \sigma_1 - \Delta\sigma) \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \delta(\sigma - \sigma_1 - \sigma') \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle P(\sigma - \sigma', \zeta),
\end{aligned}$$

ここで,

$$\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw(\sigma' - \Delta\sigma)} \rangle.$$

右辺を $\Delta\sigma = 0$ の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dw \left\langle e^{iw\sigma'} \left(1 - iw\Delta\sigma - \frac{w^2}{2} \Delta\sigma^2 + \dots \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right),
\end{aligned}$$

ただし, 虚数項と3次以上の微小項は無視した. よって,

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right) \\
&= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \left[\delta(\sigma') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} \delta(\sigma') \langle \Delta\sigma^2 \rangle \right] \\
&= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

左辺を $\Delta\zeta = 0$ の周りでテイラー展開すれば, 次式が得られる. ただし, 2次以上の微小項は無視する.

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta) + \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} \Delta\zeta &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}, \quad (2.5)$$

ここで,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta}.$$

$P(\sigma, 1) = P_0(\sigma)$ とおくと,

$$P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0).$$

式(2.5)は拡散型の方程式である. 一般的な拡散方程式における時間項は倍率 ζ に, 空間座標は垂直応力 σ に置き換えられている. よって, 倍率 ζ を上げていく (より小さいスケールを見ていく) と, $P(\sigma, \zeta)$ は σ 空間でより広がっていく. 表面間の凝着は無いという仮定では, $\sigma = 0$ で剥離が起こるので, 境界条件は次のようになる.

$$P(0, \zeta) = 0.$$

式(2.5)の両辺に σ をかけて, σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma \sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = 0.$$

ζ で積分して,

$$\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = \sigma_0, \quad (2.6)$$

ただし, 総荷重はあらゆるスケールで不変という仮定を用いた.

次に式(2.5)を σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= f(\zeta) \left\{ \frac{\partial P(\infty, \zeta)}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= -f(\zeta) \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta') \right]_1^\zeta &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) - \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, 1) &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

式(2.4)に式(2.6)と式(2.7)を代入して,

$$P(\zeta) = 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \quad (2.8)$$

次に, $\langle \Delta \sigma^2 \rangle$ を計算する.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \int d^2q \sigma_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2q \sigma_z(-\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}) \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ u_z(\mathbf{q}) &\rightarrow h(\mathbf{q}) \text{ とすれば,} \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} C(q), \end{aligned}$$

ここで, M_{zz} は次式で表される.

$$(M_{zz})^{-1} = -\frac{Eq}{2(1-\nu^2)}.$$

M_{zz} の導出については付録 A に詳細を記述する. よって,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{4} \int d^2q q^2 C(q) \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int dq q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta q} q_0 \quad (\because q = q_0 \zeta) \\ &= \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

新たに $f(\zeta) = f(q)$ と置き, $g(q) = f(q)/\sigma_0^2$ とすると,

$$g(q) = \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.9)$$

ここからは, 式(2.5)を解くことを考える. 式(2.5)を再掲すると,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}. \quad (2.5)$$

境界条件は,

$$P(0, \zeta) = P(\sigma_Y, \zeta) = 0, \quad (2.10)$$

$$P(\sigma, 1) \equiv P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0). \quad (2.11)$$

ここでは, 一般的な条件を設定し, $P(\sigma, \zeta)$ は $0 < \sigma < \sigma_Y$ でのみ定義されるとした. 後に, $\sigma_Y \rightarrow \infty$ とすることで最終的な解を導く. 式(2.5)の一般解は次のように表される.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right). \quad (2.12)$$

式(2.12)を式(2.5)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dA_n}{d\zeta} &= -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n. \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$A_n(\zeta) = C \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \quad (C = \text{const.}).$$

$\zeta = 1$ を代入すれば,

$$C = A_n(1).$$

よって,

$$A_n(\zeta) = A_n(1) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right].$$

式(2.12)に代入して,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.13)$$

三角関数の直交性より、次の等式が成り立つ。

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_Y}{2} \delta_{nm}, \quad (2.14)$$

ここで、 n 、 m は自然数とする。式(2.12)の両辺に $\sin(m\pi\sigma/\sigma_Y)$ をかけて、 $0 \sim \sigma_Y$ まで積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \end{aligned}$$

式(2.14)を用いると、

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \frac{\sigma_Y}{2}.$$

さらに、 $\zeta = 1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} A_n(1) &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P(\sigma, 1) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \delta(\sigma - \sigma_0) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \sin \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし、

$$\alpha_n = \frac{n\pi\sigma_0}{\sigma_Y} \equiv s\sigma_0. \quad (2.16)$$

式(2.15)を式(2.13)に代入して、

$$P = \frac{2}{\sigma_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.17)$$

極限 $\sigma_Y \rightarrow \infty$ をとると、

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty dn = \frac{\sigma_Y}{\pi} \int_0^\infty ds \quad \left(\because s = \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right).$$

よって、式(2.17)は次のようになる.

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \sin(s\sigma), \quad (2.18)$$

ここで、次に示す J を考える.

$$J = \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma},$$

ただし、式(2.8)より、 $P(\zeta) = 1 - J$ である. 式(2.18)より、

$$\frac{\partial P(\sigma, \zeta')}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] \cos(s\sigma).$$

よって、

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right], \quad (2.19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] &= \left[-\frac{1}{s^2} \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] \right]_1^\zeta \\ &= \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right). \end{aligned}$$

式(2.19)に代入して、

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right], \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} = 1,$$

という関係式を用いた. よって、

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= 1 - J \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right]. \end{aligned}$$

$s\sigma_0 = x$ と置き換えると、

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 \int_1^\zeta d\zeta' g(\zeta')\right], \quad (2.20)$$

ただし, $g(q) = g(q_0 \zeta) \equiv g(\zeta)$ であり, 式(2.9)によって与えられる. まとめると,

$$P(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 G(q)\right], \quad (2.21)$$

ただし, 式(2.9)より,

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.22)$$

さらに, ほとんどの場合, $\sigma_0 \ll E(0)$ であり, この場合 $G(q) \gg 1$ となり, 式(2.21)の積分範囲の内 $x \ll 1$ の部分の寄与のみが計算結果に影響する. よって, $\sin x \approx x$ と近似することができ, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp\left[-x^2 G(q)\right] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}). \end{aligned}$$

このとき, $P(q) \sim \sigma_0$ が成り立つので, 2.3 節で導出する摩擦係数の式と合わせると, 摩擦係数が公称垂直応力 σ_0 に依存しないことがわかる. さらに, $G(q) \rightarrow 0$ のとき $P(q) \rightarrow 1$ を考慮すると, 補間公式より, 次の近似式が成り立つ.

$$P(q) \simeq \left(1 + [\pi G(q)]^{3/2}\right)^{-1/3}. \quad (2.23)$$

2.3 すべり摩擦

本節では Persson の摩擦モデルによる摩擦係数の導出を説明する。
ゴムブロックが粗い路面上をすべる際の変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ について、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t),$$

と仮定すると、

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで、 $\mathbf{x} - \mathbf{v}t = \mathbf{k}$ とおくと、 \mathbf{v} は \mathbf{x} に依存しないため $d\mathbf{k}/d\mathbf{x} = 1$ より、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k dt \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{k} + i(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})t} \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Fig. 2-3 より、ゴムと路面間のせん断摩擦力を σ_f とすると、時間 t_0 の間に摩擦によって散逸するエネルギー ΔE は、

$$\Delta E = \sigma_f A_0 v t_0. \quad (2.25)$$

また、Fig. 2-4 のように ΔE をゴムの変形に使われたエネルギーとして表すと、

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^2x dt \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2x dt \left[\frac{d}{dt} \int d^2q d\omega \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \left[\int d^2x dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{q}, -\omega), \end{aligned} \quad (2.26)$$

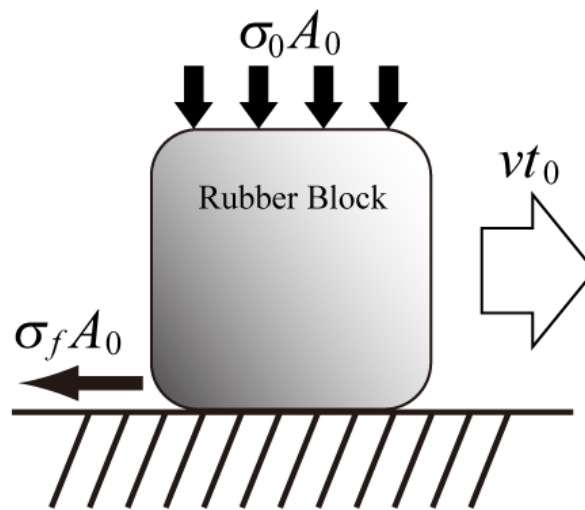


Fig. 2-3 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).

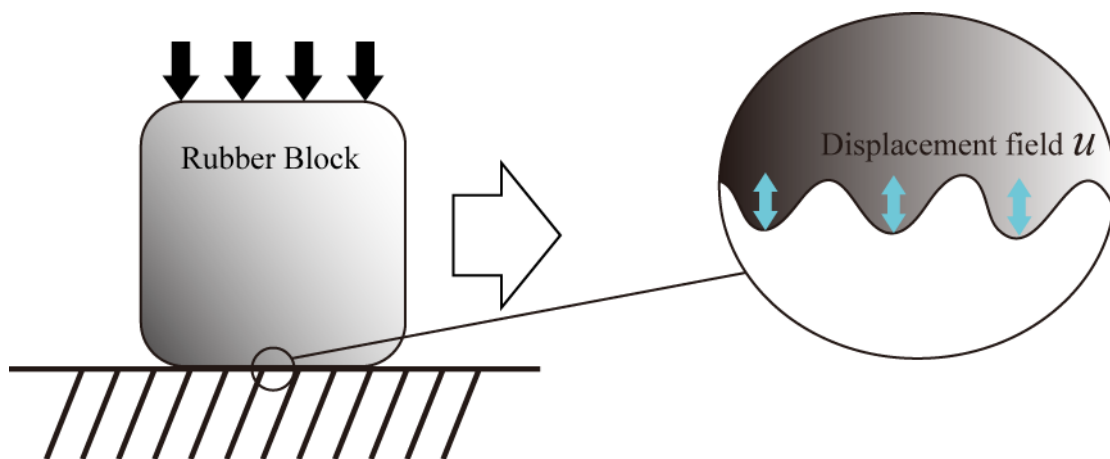


Fig. 2-4 The energy dissipated during the time period t_0 (micro).

ここで,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega),$$

より,

$$\sigma_z(-\mathbf{q}, -\omega) = [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega).$$

式(2.26)に代入して, 式(2.24)を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) u_z(\mathbf{q}, \omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(-\omega + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(0) \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \\ &= \frac{t_0}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned}$$

という関係式を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

式(2.27)と式(2.25)を比較して,

$$\begin{aligned} \sigma_f A_0 v t &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ \Leftrightarrow \sigma_f &= \frac{(2\pi)^2}{v A_0} \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで, $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表し,

$$\begin{aligned} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

という関係を用いた. さらに, ゴムが x 方向にすべるとすれば, $\omega = vq_x$ と書けるので,

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.29)$$

路面の表面プロファイルは次のように記述される.

$$z = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y)).$$

ゴムが路面上をすべる際、路面の表面プロファイルに完全に追従するとすれば、

$$u_z = h(\mathbf{x}),$$

と書けるので、式(2.29)は次のように表される.

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.30)$$

今、路面表面粗さパワースペクトルは次のように定義される.

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.31)$$

さらに、 $\langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}') \rangle$ が $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のみに依存することをを用いると、次の関係式が得られる.

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \quad (2.32)$$

式(2.32) の導出については付録 B に詳細を記述する. 式(2.32)と M_{zz} を式(2.30)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \left[-\frac{2(1-\nu^2)}{E(-\omega)q} \right]^{-1} \\ &= i \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \frac{E(-\omega)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

M_{zz} の導出については付録 A に詳細を記述する. $q_x = q \cos \phi$, $E = E(\omega) = E(qv \cos \phi)$ である. 厳密には ν も周波数に依存するが、その依存度は無視できるほど小さい. Amontons-Coulomb の法則より、摩擦係数 μ を $\mu = \sigma_f / \sigma_0$ と定義すると、

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) P(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}, \quad (2.34)$$

ここで、2.2 で導出した真実接触領域の割合 $P(q)$ を導入した。さらに、波数空間において直交座標から極座標への座標変換を考えると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} q_x = q \cos \phi \\ q_y = q \sin \phi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dq_x = \cos \phi dq - q \sin \phi d\phi \\ dq_y = \sin \phi dq + q \cos \phi d\phi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} dq_x \\ dq_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -q \sin \phi \\ \sin \phi & q \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

右辺の行列のヤコビアン $|J|$ は、

$$|J| = q \cos^2 \phi + q \sin^2 \phi = q.$$

よって、

$$d^2q = dq_x dq_y = q dq d\phi.$$

したがって、式(2.34)は次のように表される。

$$\mu = \frac{1}{2} \int dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\phi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0}. \quad (2.35)$$

さらに、路面がセルフアフィンフラクタル性を持つと仮定すると、

$$C(q) \simeq k \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (k = \text{const.}),$$

と表すことができる。セルフアフィンフラクタル表面についての詳細は 3.2 節で述べる。 $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$ と定義すると、式(2.31)より、

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{2} &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q C(q) \\ &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q k \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \\ &= \frac{\pi}{H} q_0^{2(H+1)} k (q_0^{-2H} - q_1^{-2H}), \end{aligned}$$

ここで、 $q_0 \ll q_1$ より、

$$\frac{h_0^2}{2} \simeq \frac{\pi}{H} q_0^2 k.$$

よって,

$$k \approx \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2.$$

したがって,

$$C(q) \approx \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)}. \quad (2.36)$$

式(2.36)を式(2.35)に代入して, $q = q_0 \zeta$ を用いて μ を ζ で表した近似式は次のようになる.

$$\mu \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 \nu \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}. \quad (2.37)$$

さらに, 式(2.22)は次のように書きかえられる.

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' \nu \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.38)$$

3 路面表面粗さパワースペクトル

3.1 表面粗さパワースペクトルの定義

Persson の摩擦モデルによると，路面表面粗さの摩擦力に対する寄与は路面の表面粗さパワースペクトル $C(q)$ によって決まる．ここで， $C(q)$ は次のように定義される．

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

ただし， $h(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ における高さプロファイルであり， $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す．ここでは路面の等方性を仮定しているため，路面表面粗さパワースペクトルは波数ベクトル \mathbf{q} の絶対値 $|\mathbf{q}| = q$ のみに依存する．また，路面表面の統計的性質は基準位置によらないと仮定しているため，高さプロファイルの自己相関関数は $h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})h(\mathbf{x}_0) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{0})$ であることに注意されたい．つまり，路面表面粗さパワースペクトルは，路面表面の高さプロファイルの自己相関関数のアンサンブル平均をフーリエ変換したものと定義される．物理的には，路面表面粗さパワースペクトルは，路面凹凸の波数成分ごとの強さを表したものとすることができる．

3.2 セルフアフィンフラクタル表面

セルフアフィンフラクタル表面とは、表面の観察倍率を上げる際、高さを平面座標とは異なる倍率で表示すると、観察倍率を上げる前の表面と同じ表面プロファイルが見られる表面のことである。具体的には、次のようなスケール変換を考える。

$$x \rightarrow \zeta x, y \rightarrow \zeta y, z \rightarrow \zeta^H z, \quad (3.2)$$

このとき、表面の統計的性質が倍率変更前後で変化しない表面がセルフアフィンフラクタル表面である。ここで、 H はハースト数であり、フラクタル次元 D_f と、 $D_f = 3 - H$ の関係がある。さらに、セルフアフィンフラクタル表面では、

$$C(q) \sim q^{-2(H+1)}, \quad (3.3)$$

の関係が成り立つ。自然に生成された一般的な表面形状に見られるパワースペクトルと波数の関係を Fig. 3-1 に示す。ここで、セルフアフィンフラクタル性は $q_0 < q < q_1$ の範囲で見られる。 q_0 は低波数ロールオフであり、セルフアフィンフラクタル性を示す波数の最小値を示す。 q_1 は高波数カットオフであり、その波長は分子スケールである。

クラック表面や路面のような自然生成された表面は、多くの場合このセルフアフィンフラクタル性を持つことが知られている。

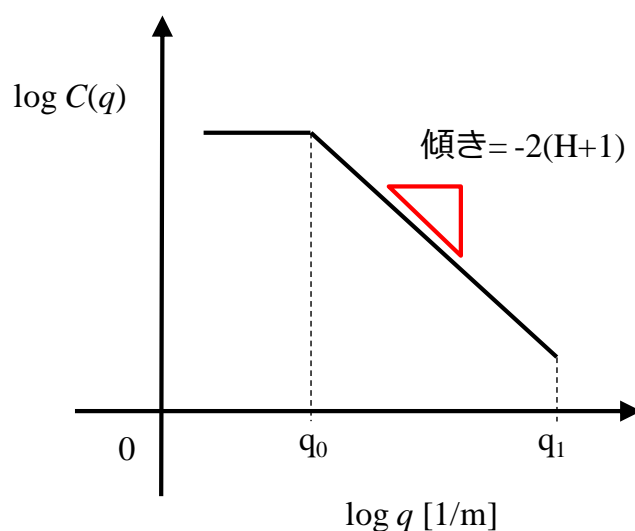


Fig. 3-1 The surface roughness power spectrum of a surface which is a self-affine fractal for $q_0 < q < q_1$.

3.3 路面サンプルの表面粗さパワースペクトル

3.3.1. 表面高さデータの計測

路面サンプルのパワースペクトルデータを得るため、まず、表面凹凸の高さデータを計測する必要がある。本研究では、Fig. 3-2 に示す光学顕微鏡（KEYENCE VK-9500）を用いて計測を行った。また、Table 3-1 に計測条件を示す。ここで、計測倍率は 10 倍と 100 倍の 2 種を取った。これは、計測倍率によって最終的に得られるパワースペクトルの波数領域に差異が生じ、計測倍率が高い程、高い波数領域のデータが得られるためである。本計測では、2 種の計測倍率により、 $10^3 < q < 10^7$ [1/m] の波数範囲（ $10^{-3} < \lambda < 10^{-7}$ [m] の波長範囲）のパワースペクトルデータを得る。



Fig. 3-2 Laser microscope.

Table 3-1 Conditions of the measurements.

Measuring machine	Laser microscope (KEYENCE VK-9500)
Observed area	2.849×2.849 [mm ²] (×10)
	0.281×0.281 [mm ²] (×100)
Points	2048×2048

3.3.2. 路面サンプル

本研究の摩擦試験では、3M 社製すべり止めテープ Safety-Walk type B と三共理化学製サンドペーパーP60 の2種類の路面サンプルを用いる。以降、それぞれ路面 A、路面 B と呼ぶこととする。2種類の路面サンプルは、Fig. 3-3 (a)、(b)に示すように、鋳物粒子を吹き付けた表面を有している。路面 A を倍率 10 倍で測定した表面高さデータを3次元的にプロットしたものを Fig. 3-4 (a) に、倍率 100 倍のものを Fig. 3-4 (b) に示す。同様に、路面 B を倍率 10 倍で測定した表面高さデータを3次元的にプロットしたものを Fig. 3-5 (a) に、倍率 100 倍のものを Fig. 3-5 (b) に示す。ただし、測定は摩擦試験済みの表面サンプルを用いて行った。それぞれのデータで、線のように立っているデータは計測ノイズである。Fig. 3-3 (a)と Fig. 3-3 (b)からわかる通り、路面 A の方が表面に光沢があるため Fig. 3-4 (a)においてノイズが多く存在している。Fig. 3-4、Fig. 3-5 の表面データから、各路面の二乗平均粗さを計算し、路面 A では88.45 [μm]、路面 B では82.94 [μm]を得た。よって、マクロな粗さは路面 A の方が大きいと言える。

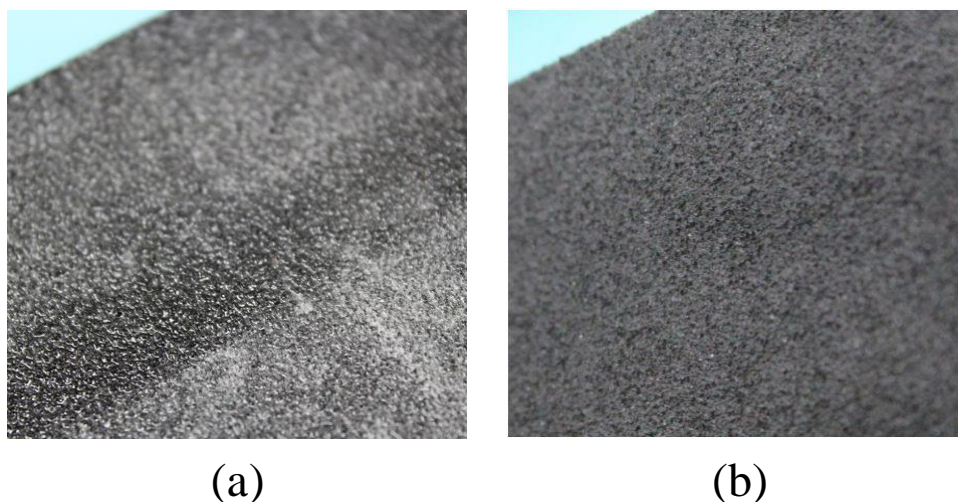


Fig. 3-3 (a) Safety-Walk type B, (b) Sandpaper P60.

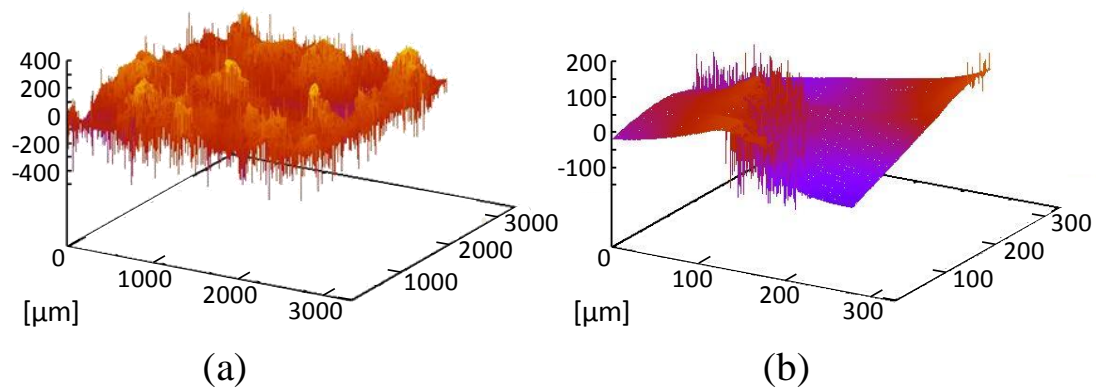


Fig. 3-4 Surface image of Surface A : (a) $\times 10$, (b) $\times 100$.

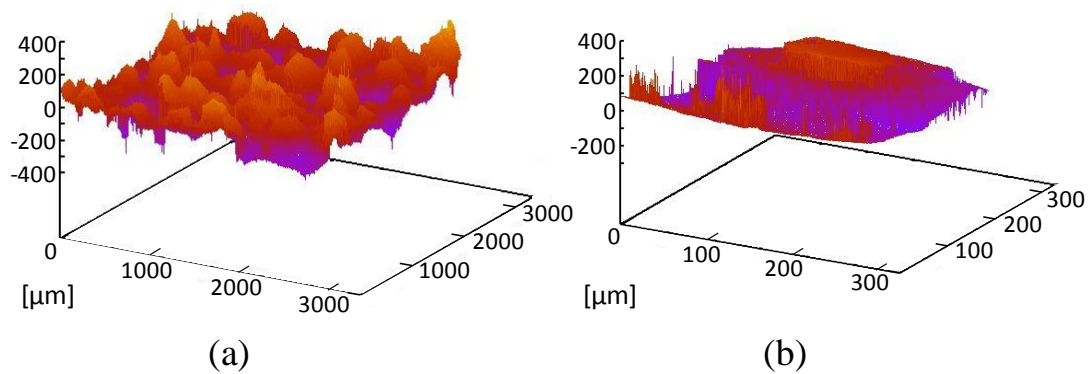


Fig. 3-5 Surface image of Surface B : (a) $\times 10$, (b) $\times 100$.

3.3.3. 表面粗さパワースペクトルの計算

得られた表面高さデータから、路面 A と路面 B それぞれの表面粗さパワースペクトルを計算した。路面 A の表面粗さパワースペクトルを Fig. 3-6, 路面 B の表面粗さパワースペクトルを Fig. 3-7 に示す。横軸は波数 q , 縦軸はパワースペクトル $C(q)$ であり, 青は観察倍率 10 倍のデータ, 赤は観察倍率 100 倍のデータである。実表面の表面粗さパワースペクトルにはばらつきが存在するため, $C(q)$ を求める際, 波数 q に対する平均化処理を行った。また, 各観測倍率において計測のノイズの影響が出ていると考えられる高波数側のデータはカットした。本研究における, 表面高さデータから表面粗さパワースペクトルを計算する手法については, 機械工学専攻酒井・泉研究室の緒方が確立した。

計算結果から, 用いた試料の表面粗さパワースペクトルのグラフがほぼ直線で得られ, 観察した倍率において, 試料表面がセルフアフィンフラクタル性を持つことがわかる。路面 A, 路面 B のパワースペクトルデータから得られた情報を Table 3-2 に示す。 h_0 は $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$ と定義され, 路面の平均粗さに対応する。ハースト数 H はグラフの近似直線の傾き a から, $a = -2(H+1)$ によって計算する。

Table 3-2 より, 路面 A, 路面 B 共にセルフアフィンフラクタル性が現れる波数の最小値 (ロールオフ波数) q_0 は 7700 [1/m] 程度となり, 試料表面のマクロな凹凸の波長が 1 [mm] 程度のオーダーであることと一致する。また, h_0 は路面 A の方が大きく, H は路面 B の方が小さいことから, マクロな粗さにおいては路面 A の方が大きく, 観察倍率が大きくなるほど路面 B の粗さの方が大きくなっていくことがわかる。

Table 3-2 Surface properties.

	Surface A	Surface B
Sample	Safety-Walk type B (Sumitomo 3M Limited)	Sandpaper P60 (Sankyo Rikagaku Co., Ltd.)
q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
H	0.48775	0.40485

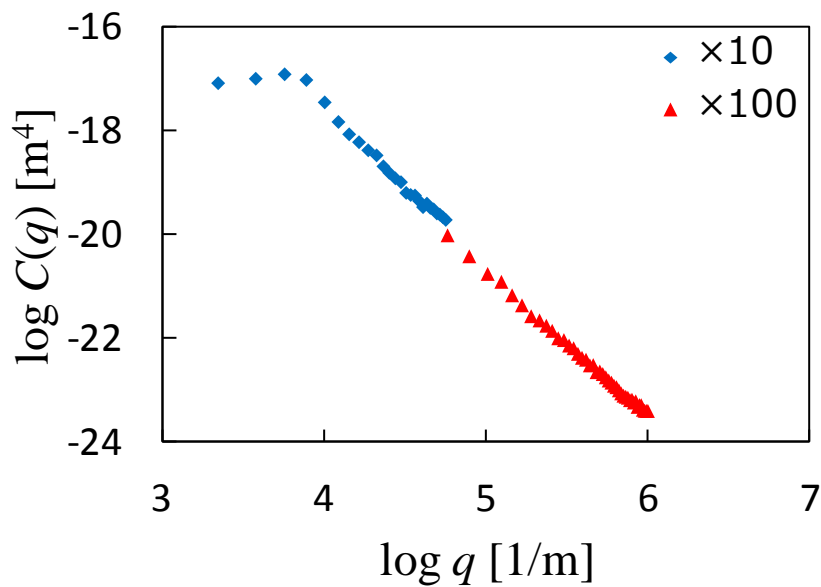


Fig. 3-6 The Surface roughness power spectrum of surface A (used).

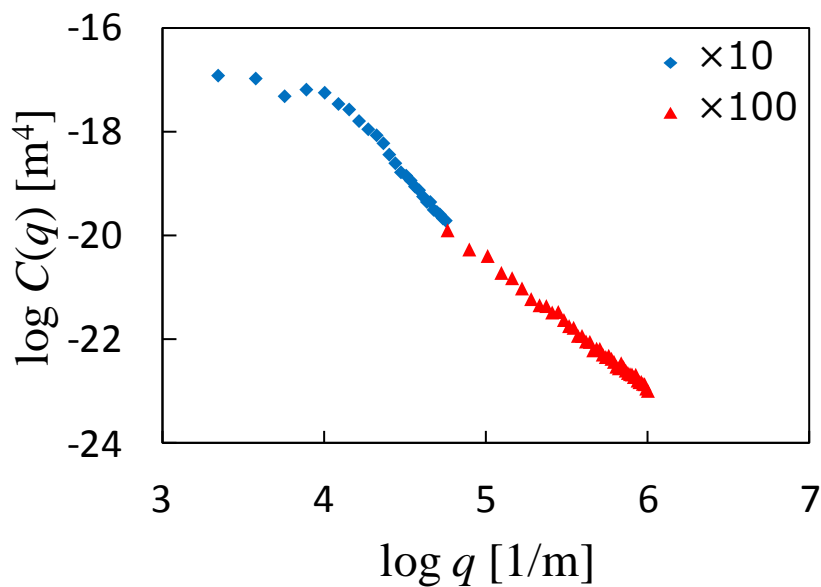


Fig. 3-7 The Surface roughness power spectrum of surface B (used).

4 ゴムの粘弾性特性

4.1 タイヤゴムにとっての粘弾性特性

タイヤ開発において、シミュレーション技術は、性能予測や構造解析など幅広く利用されており、その重要性は大きい。その解析に用いる材料特性として、タイヤゴムの粘弾性特性は非常に重要なものであり、タイヤの性能や特性に直に結びつくものと考えられている (Fig. 4-1 参照)。村岡[23]は、粘弾性特性がタイヤ開発にどのように用いられてきたか、現在どのような研究が行われているかについてまとめ、粘弾性特性を用いた解析手法の今後について考察した。

粘弾性特性がタイヤの摩擦性能に強く影響することはよく知られており、さまざまな研究が行われてきた。Grosch[24]は、粘弾性特性と摩擦特性の関係を実験値を用いて詳細に検証し、両者に密接な関係があることを示した。また、Ludema ら[25]は、接触面積とせん断強さをを用いたモデルによって、摩擦特性と粘弾性特性を結びつけた。Persson の理論[12]においてもヒステリシスロスにおいては損失弾性率が、真実接触領域の割合においては複素弾性率のノルムが重要となる。この点において、Persson の理論は従来の理論と同様である。

粘弾性特性を用いた研究に関しては、最近ではゴム材料の充てん剤（フィラー）に関するものが多くなっている。タイヤゴムに用いる充てん剤としてはカーボンブラックが主流であり、近年は望ましい摩擦特性が得られることからシリカも多く用いられている。これら充てん剤の、ポリマーとの相互作用や粘弾性特性に及ぼす影響などについて多くの研究が行われている。

このように、粘弾性特性は摩擦特性を得るための重要な要素の一つであり、それを可能な限り正確に表現することが、摩擦特性の予測精度向上につながる。

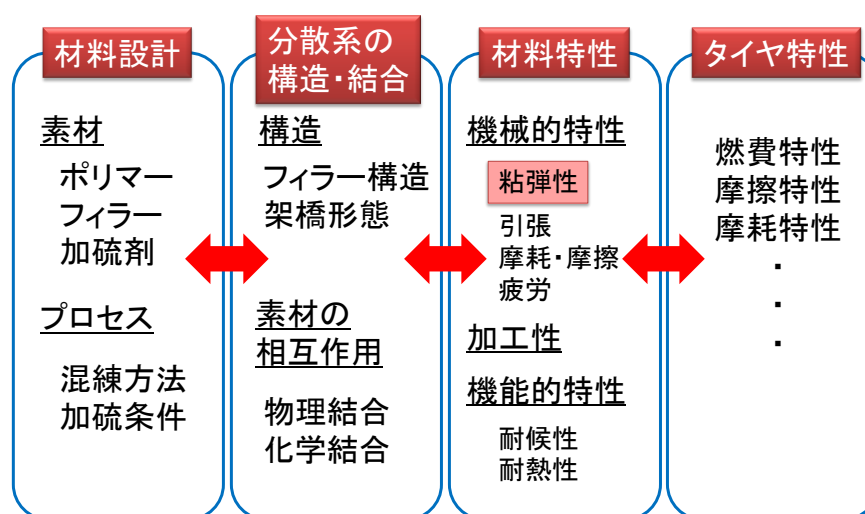


Fig. 4-1 The relation between viscoelasticity and other properties[23].

4.2 バネ・ダンパモデルによる粘弾性特性の表現

粘弾性体は非常に速い変形に対しては弾性的な、非常に遅い変形に対しては粘性的な振る舞いを見せる。このような挙動をスプリングとダッシュポットの力学モデルによって表現できれば、数学的に取り扱うことが容易になる。ここで、粘弾性体の典型的な挙動であるクリープと応力緩和を考える。この両挙動を表現するために考案された代表的なモデルが、Voigt・Kelvin モデルと Maxwell モデルである (Fig. 4-2 参照)。

実際の粘弾性体の力学的挙動は複雑であるため、構成要素数を増やして、より正確に挙動を近似することになる。そこで、本研究における粘弾性挙動の表現は Fig. 4-3 に示す一般化 Maxwell モデルを用いる。現在、粘弾性解析ではこの一般化 Maxwell モデルが広く使用されている。一般化 Maxwell モデルの応力緩和式と緩和弾性率はそれぞれ次のように表される。

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (4.1)$$

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (4.2)$$

ここで、 σ は応力、 E はヤング率である。 τ は緩和時間と呼ばれ、ダッシュポットの粘性係数 η を用いて $\tau = \eta/E$ で与えられる。また、動的変形を与えた場合の複素弾性率は次のように表される。

$$E(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} - \frac{1}{i\omega\eta_i}}, \quad (4.3)$$

ここで、 $E(\omega)$ を、

$$E(\omega) = E' + iE'',$$

と表したとき、 E' を貯蔵弾性率、 E'' を損失弾性率と呼ぶ。

Persson の摩擦理論では、式(4.3)で得られる複素弾性率を用いて摩擦係数の計算を行う。ただし、ゴムの複素弾性率はひずみ依存性があり、ひずみが小さいときは、応力とひずみは線形性を保つが、ひずみが大きくなると一般的には複素弾性率は低下する傾向にある[26]。そのため、路面凹凸にゴムの変形が追従する場合、そのひずみ量を考慮した複素弾性率を用いる必要がある。

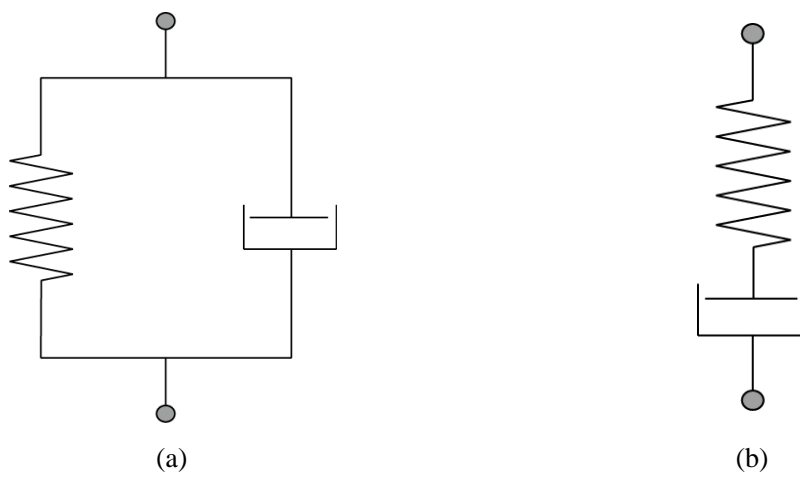


Fig. 4-2 (a) Voigt • Kelvin Model, (b) Maxwell Model.

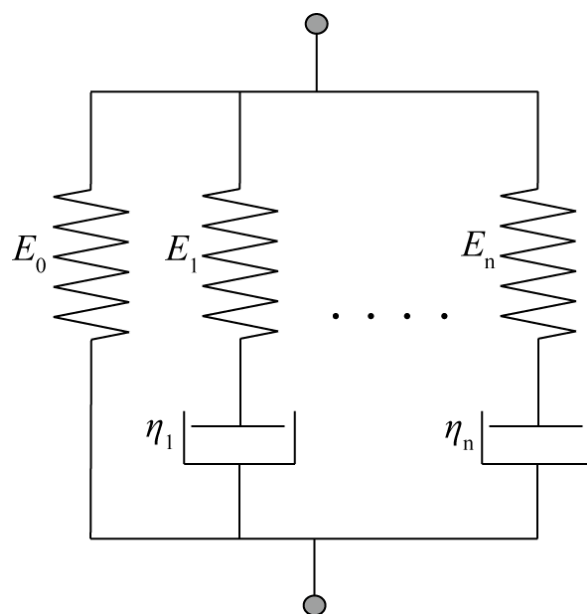


Fig. 4-3 Generalized Maxwell Model.

4.3 摩擦試験用ゴム試験片の粘弾性特性

本研究の摩擦試験で用いるゴム試験片は Fig. 4-4 に示す半球状サンプルである。ゴム試験片の配合データを Table 4-1 に示す。ただし phr はゴム業界特有の単位であり、ゴム重量 100 に対する各種配合剤の重量部である[27]。

Persson の理論による摩擦係数の計算にはゴム試験片の複素弾性率が必要である。そこで、ゴム試験片の複素弾性率を粘弾性試験によって求め、一般化 Maxwell モデルを用いて表現した。Fig. 4-5 に、式(4.3)に基づいてゴム試験片の複素弾性率を計算した結果を示す。

得られたデータの変形の周波数帯域は $1 \sim 10^5$ [Hz] である。これは、摩擦試験において路面凹凸によるゴムの変形周波数をカバーしている。この変形の周波数帯域では、貯蔵弾性率、損失弾性率共に単調に増加するが、より大きい周波数でゴムの貯蔵弾性率は一定になり、損失弾性率はピークを迎えた後、減少に転じることが一般に知られている[28]。

ゴム試験片の制作、ゴム試験片の組成情報の提供、粘弾性試験の実施、複素弾性率の一般化 Maxwell モデルへのフィッティングは株式会社ブリヂストンが行った。



Fig. 4-4 Test piece.

Table 4-1 Test piece properties.

Diameter [mm]	40
SBR [phr]	100
Carbon black [phr]	70
Softener [phr]	40
Sulfur [phr]	1.5
Others	Age inhibitor, Rubber accelerator, etc.

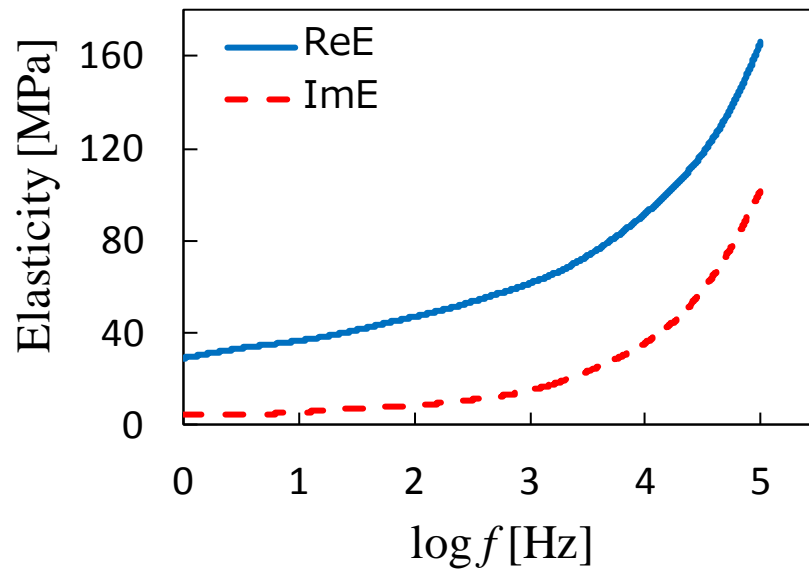


Fig. 4-5 The complex modulus of elasticity.

5 摩擦試験

5.1 試験目的

摩擦係数はゴムの物性や路面粗さなどさまざまな因子に依存する。そこで、その中でも特に重要な因子について、摩擦係数がどのように依存し、挙動を示すかを力学的に明らかにし、理論モデルに基づいた摩擦係数予測と比較することが可能な実験値を得ることが本試験の目的である。具体的な検証因子は、すべり速度、路面表面粗さパワースペクトル、ゴムの粘弾性特性（複素弾性率）とした。本試験は試験条件決定後、株式会社ブリヂストンが実施した。

5.2 摩擦試験の概要

Fig. 5-1 に摩擦係数の計測に用いられる摩擦試験機の概要を示す。これは企業においてタイヤの設計段階でゴムの摩擦係数を計測するために用いられる機器で、路面サンプルにタイヤの材料となるゴム試験片を荷重 L で押し付け、摩擦方向にかかる力 F_f を計測し、 $\mu = F_f / L$ として動摩擦係数を算出する試験機である。表面に様々な路面サンプルを張り付けることで、多様な路面の摩擦係数の計測が可能である。

この試験機を用いて通常行われる摩擦試験では、ゴム試験片は通常の車両のタイヤの平均的な接地圧である 200~300kPa になる様に押し付けられ（本研究で用いる半球状ゴム試験片の場合およそ 20N）、その後、路面が指定速度まで線形に加速され、その間の各反力が計測される。

本研究ではこの摩擦試験機を用い、2種の路面に対するゴム試験片の摩擦係数を計測した。

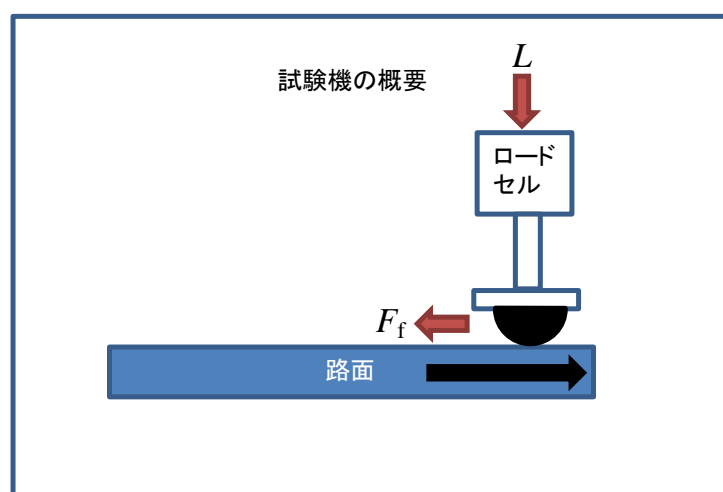


Fig. 5-1 The friction testing machine (株式会社ブリヂストン提供).

5.3 加速試験

本研究で行った加速試験の目的は次の2つである。

1. ゴムの摩耗や温度上昇の影響を極力抑え、ゴムの速度依存性を評価する。
2. 路面表面粗さパワースペクトルの違いによる摩擦係数の違いを評価する。

試験条件を Table 5-1 に示す。ゴムの摩耗や温度上昇の影響を極力抑えるため、荷重は全て 10[N]（試験可能な最低荷重）とした。路面静止状態でゴム試験片を押しつけ、指定速度まで加速する。摩擦係数の計測値がピークを越えた後、摩擦係数が安定した 5 秒間の平均から摩擦係数を導出した。路面は常に同じ場所を使用した。

Table 5-1 Conditions of accelerating friction tests.

Trial No.	Surface	Sliding speed [mm/s]	Times
1	A	1	×3
2	A	2	×3
3	A	3	×3
4	A	4	×3
5	A	5	×3
6	A	10	×3
7	B	2	×3
8	B	3	×3
9	B	4	×3
10	B	5	×3
11	B	10	×3

※路面 A, 路面 B については Table 3-2 を参照.

Fig. 5-2 に加速試験の結果を示す。それぞれ各 3 走の平均を直線で結んで示す。この試験では、ゴムの摩耗や温度上昇の影響を抑えるため、試験可能な最低荷重である 10[N]で試験を行った影響で計測の精度が悪くなり、計測値にばらつきが生じた。そのため、路面・速度に対する摩擦係数の正確な定量的評価は難しいが、全体的な傾向や相対比較には有効なデータが得られた。

Fig. 5-2 より、路面 A では $1 \leq v \leq 3$ 、路面 B では $2 \leq v \leq 5$ で摩擦係数は増加した。これは、低速度では速度の増加とともに摩擦係数は増加するという一般的に知られる性質[29]と同様である。

路面 A の $3 \leq v \leq 5$ で摩擦係数は減少、その後 $v = 10$ で摩擦係数は 0.06 増加した。路面 B の $v = 5$ から $v = 10$ では摩擦係数は 0.05 減少した。このような単調増加でない摩擦係数の挙動は、 $v \geq 1$ で摩擦による発熱の影響が無視できなくなることが原因と考える[30]。また、摩擦係数の凝着項の影響も考えられるが、これについては 6.5 節で検証する。

路面 A と路面 B の摩擦係数を比較すると、 $2 \leq v \leq 3$ では路面 A の方が大きく、 $4 \leq v \leq 10$ では路面 B の方が大きい値を示した。本試験における摩擦係数の最大値は、路面 A で 1.51、路面 B で 1.69 であった。

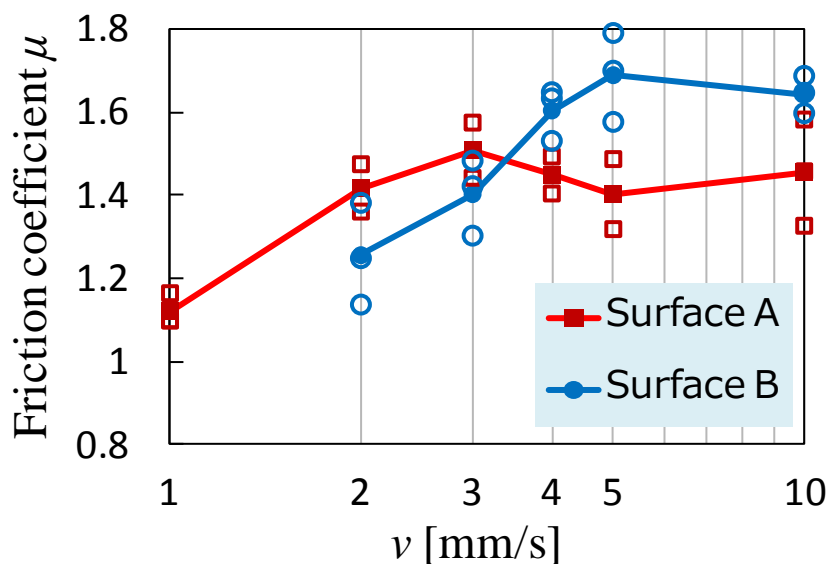


Fig. 5-2 Results of accelerating friction tests (株式会社ブリヂストン提供).

6 摩擦係数予測

6.1 Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 q_1 依存性

6.1.1. 計算条件

Persson の摩擦理論においては、マイクロ領域の力学的取り扱いについての考察が不足しており、カットオフ波数 q_1 の理論的決定法が示されていない。カットオフ波数 q_1 の取り方によって摩擦係数の値は大きく変わり得る。そこで、摩擦係数のカットオフ波数 q_1 依存性を調べるために、 $q_1 = q_0 \zeta_{\max}$ で定義される ζ_{\max} に対するパラメータサーベイを行う。具体的には、 $\zeta_{\max} = 100, 200, 500, 1000$ について摩擦係数の計算を行う。

以下に、摩擦係数の計算に必要な情報をまとめる。計算条件を Table 6-1 に示す。

・摩擦係数 μ の計算式

$$\mu \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}, \quad (6.1)$$

ここで、真実接触領域の割合 $P(\zeta)$ は次の式で計算される。

$$P(\zeta) \approx \left(1 + [\pi G(\zeta)]^{3/2}\right)^{-1/3}, \quad (6.2)$$

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (6.3)$$

・すべり速度範囲

本研究の粘弾性試験で得られた複素弾性率の周波数帯域は $1 \sim 10^5$ [Hz] である。ゴムが路面上をすべる際、路面の波数 q の凹凸から受ける変形周波数 f は $f = qv/2\pi$ で表されるので、 f の最大値 $f_{\max} = 10^5$ [Hz] に対して、 $v_{\max} = 2\pi f_{\max}/q_1$ で表される速度 v_{\max} が、摩擦係数の計算が可能な速度の最大値である。 q_1 に対する感度解析では、 $\zeta_{\max} = 100, 200, 500, 1000$ について計算を行うので、 $\zeta_{\max} = 1000$ に対する $v_{\max} = 2\pi \times 10^5 / (7731.4 \times 10^3) \approx 8.13 \times 10^{-2}$ [m/s] を速度の最大値として、摩擦係数の計算を行う。

Table 6-1 Calculation conditions of friction coefficient.

		Surface A	Surface B
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
	H	0.48775	0.40485
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	$E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) - (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$	
	ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		300	
Maximum magnification ζ_{\max}		100, 200, 500, 1000	
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-5} \sim 8.13 \times 10^{-2}$	

6.1.2. 計算結果

Fig. 6-1, Fig. 6-2 にそれぞれ, ゴム試験片の路面 A, 路面 B に対する摩擦係数を $\zeta_{\max} = 100, 200, 500, 1000$ で計算した結果を示す. また, Table 6-2 にそれぞれの ζ_{\max} に対応する波長 $\lambda_{\min} = 2\pi / (q_0 \zeta_{\max})$ を示す. λ_{\min} は考慮する路面凹凸の最小波長を意味する.

Fig. 6-1 から, $\zeta_{\max} = 100$ の摩擦係数に対して, $\zeta_{\max} = 200$ の摩擦係数は 1.72 倍~2.22 倍, $\zeta_{\max} = 500$ の摩擦係数は 3.57 倍~4.86 倍, $\zeta_{\max} = 1000$ の摩擦係数は 5.14 倍~6.92 倍の値となる. 同様に Fig. 6-2 では, $\zeta_{\max} = 100$ の摩擦係数に対して, $\zeta_{\max} = 200$ の摩擦係数は 1.63 倍~2.11 倍, $\zeta_{\max} = 500$ の摩擦係数は 3.12 倍~4.37 倍, $\zeta_{\max} = 1000$ の摩擦係数は 6.21 倍~8.05 倍の値を示す. このように, 路面特性によって多少の差はあるものの, Persson の摩擦モデルにおいて, 摩擦係数はカットオフ波数 q_1 に強く依存することがわかる.

一般的に, 吸着膜や潤滑剤などの存在しない比較的清浄な表面どうしの摩擦 (乾燥摩擦) の摩擦係数は 0.5~1.5 程度である[31]. $v = 10^{-3}$ [m/s] 以上ではゴムの温度上昇と摩耗の影響が出る[30]ことを考慮すると, $\zeta_{\max} = 100 \sim 200$ 程度の計算結果が, 摩擦係数として妥当な値を与える. また, Persson は摩擦係数の数値計算において, 観察された最小の摩耗粒子の大きさからカットオフ波数について $q_1 = 5 \times 10^6$ [1/m] とした[30]が, これは本摩擦モデルの計算における $\zeta_{\max} = 646.7$ に対応する. Fig. 6-1 より, 路面 A において $\zeta_{\max} = 500$, $v = 10^{-3}$ のとき $\mu = 2.3$ であり, Fig. 6-2 より, 路面 B において $\zeta_{\max} = 500$, $v = 10^{-3}$ のとき $\mu = 3.0$ である. これらは, 一般的な摩擦係数の値[31]と比較すると過大に見積もられていることがわかる. よって, 本摩擦モデルの計算においては, Persson によるカットオフ波数の決定法とは異なる見積方法が必要となる.

以上より, カットオフ波数 q_1 は一律に定めることができず, 計算条件によって適切な値を設定しなければ摩擦係数を正確に評価することができない. カットオフ波数 q_1 は摩擦の際ミクロ領域で起こる素過程によって決定されるため, 路面の表面特性やゴム材料特性に依存すると考えられる.

Table 6-2 Relation between maximum magnification and minimum wavelength.

ζ_{\max}	λ_{\min} [μm]
100	8.13
200	4.06
500	1.63
1000	0.81

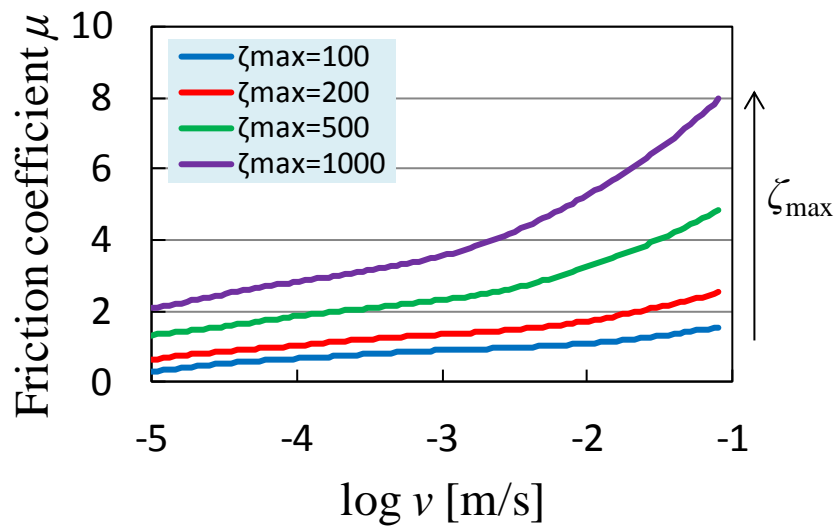


Fig. 6-1 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface A with various maximum magnifications.

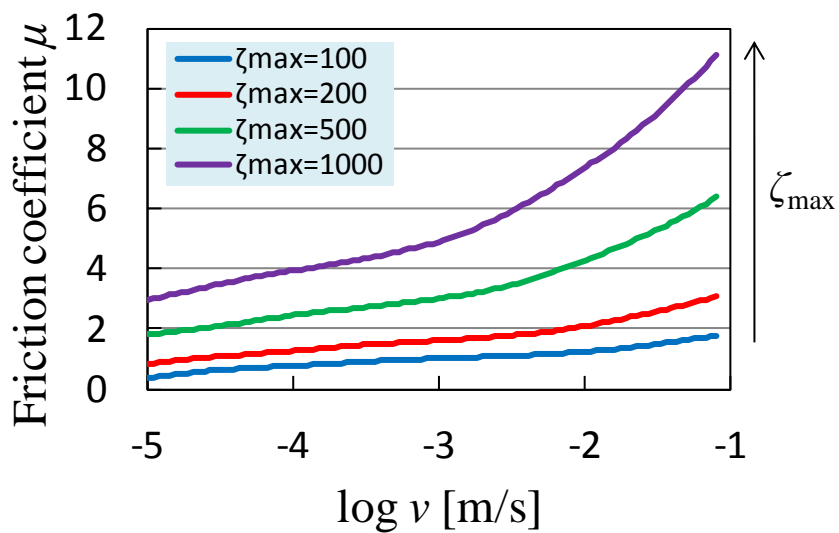


Fig. 6-2 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface B with various maximum magnifications.

6.2 弾性エネルギー密度を考慮した摩擦モデル

6.2.1. ゴムに蓄積されるエネルギー

ゴムが路面上をすべる際、ゴムに蓄積されるエネルギーの総量 E_{all} は次のように分解できると仮定する.

$$E_{\text{all}} = E_{\text{el}} + E_{\text{ad}} + E_T, \quad (6.4)$$

ここで、 E_{el} はゴムに蓄積される弾性エネルギー、 E_{ad} はゴムと路面の表面間相互作用による凝着エネルギー、 E_T はゴムの温度上昇に寄与する熱エネルギーである.

現在、ミクロな摩擦は分子間の凝着によるものと考えられており[32]、分子スケールにおいて摩擦力と凝着力には深い関係があることが知られている[33]. しかし、タイヤ-路面間のマクロな摩擦スケールと分子スケールの間には $\sim 10^7$ ものスケール差が存在するため、分子間の凝着をマクロな摩擦現象と直接結び付けることは困難である. Persson は様々なスケールでの凝着の影響を評価する理論を提出した[15][16]が、タイヤ-路面間の摩擦においては凝着の効果が重要となる波長 λ のスケールは $\lambda < 0.1 [\mu\text{m}]$ であり、Persson の示す q_1 より小さいスケールであるため、凝着の影響は非常に小さいとした[12][34]. よって、本モデルにおいて、式(6.4)における凝着エネルギー E_{ad} は無視できるとする.

すべり速度が大きくなるほど、摩擦に対するゴムの温度上昇の影響が大きくなる. Persson は実験と理論の比較[30]において、 $v < 1 [\text{mm/s}]$ の範囲では熱の拡散に十分な時間があり、ゴムの温度上昇 (flash temperature) の影響は無視できるとした. 本研究で行った摩擦試験は $v = 1 \sim 10 [\text{mm/s}]$ の範囲で行っているため、ゴムの温度上昇の影響が出る可能性があるが、Persson の示す $v < 1 [\text{mm/s}]$ という速度範囲に近く、ゴムの温度上昇の影響は限定的であると考えられる. よって、式(6.4)における熱エネルギー E_T は考慮せずに議論を進める.

ゴムが均質体とみなせるスケールでは、ひずみエネルギーに相当する弾性エネルギー密度が定義できる. したがって、本モデルの場合、ゴムがある波数の凹凸に追従変形することで蓄積される弾性エネルギーは、その波数における代表高さを考慮することで、ゴムの弾性エネルギー密度に関連付けることができる. ここで、路面粗さはマルチスケール性を持っており、小さいスケールの凹凸付近では、大きいスケールの凹凸によって蓄積される弾性エネルギーに小さいスケールの凹凸による弾性エネルギーが加算され、より大きな弾性エネルギーが蓄積される (Fig. 6-3 参照). つまり、波数 q が増えるほど、その凹凸によって蓄積される弾性エネルギーは大きくなる. 弾性エネルギー密度は以下の 2 つの理由によって上限値を有すると考える.

1. ゴムの破壊現象とゴムに貯蔵される弾性エネルギーには密接な関係があることが知られている[35]- [37]. よって, ゴムに貯蔵される弾性エネルギーが上限値を超えるような大きい波数領域では, ゴムはき裂などの破壊が進展すると考えられる. この破壊モードは摩耗現象の因子となり, それ以下の波数領域において弾性エネルギーは蓄積されない. これをモード1と呼ぶ.
2. 凹凸が一定以上小さいスケールになると, ゴムの組成の不均質性がゴムの変形挙動に影響するようになる. このゴムの不均質性によりヒステリシスロスが著しく減少するモードをモード2と呼ぶ.

ゴム-路面間の摩擦において, すべり速度が大きい程, ゴムの貯蔵弾性率は大きくなり (Fig. 4-5 参照), 大きいスケールの凹凸における弾性エネルギー密度が上限値に達する. 一方, 小さいすべり速度では, ゴムの貯蔵弾性率が小さいため (Fig. 4-5 参照), ゴムの内部構造の不均質性が現れるスケールまで弾性エネルギー密度は上限値に達しない. すなわち, 高速度側ではモード1が, 低速度側ではモード2が支配的となる. 本研究では, すべり速度 $10^{-3} < v < 10^{-2}$ [m/s] という比較的高速な範囲を扱っている. また, 実験によって摩耗が確認されているため, ゴム-路面間摩擦のマイクロな領域において, モード1が支配的であると仮定し, 弾性エネルギー密度の上限値を設定する. そして, 弾性エネルギー密度の上限値を与える波数をカットオフ波数 q_1 と定める.

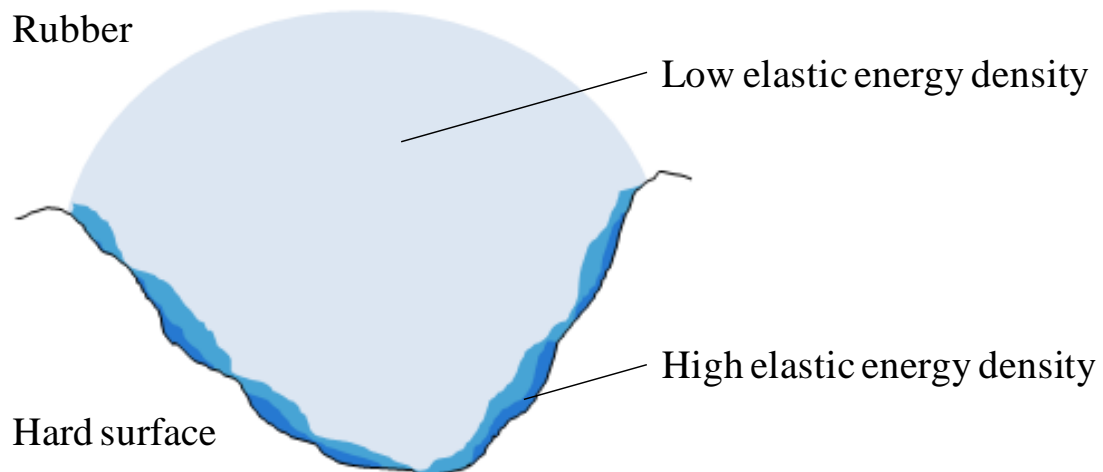


Fig. 6-3 The elastic energy density stored in the deformation field in the rubber.

6.2.2. 弾性エネルギー密度の導出

弾性エネルギー密度の上限値を定め、カットオフ波数 q_1 を決定するにあたり、各波数における弾性エネルギー密度を求める必要がある。

u_z をゴム表面の垂直方向変位、 σ_z を垂直応力とすると、ゴムに貯蔵される全体の弾性エネルギー U_{all} は次式に表される。

$$\begin{aligned}
 U_{\text{all}} &= -\frac{1}{2} \int d^2x \langle u_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^2x \langle \int d^2q u_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \sigma_z(\mathbf{x}) \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^2q \langle u_z(\mathbf{q}) \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \rangle \\
 &= -\frac{(2\pi)^2}{2} \int d^2q \langle u_z(\mathbf{q}) \sigma_z(-\mathbf{q}) \rangle, \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$u_z(\mathbf{q}) = M_{zz}(\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}), \tag{6.6}$$

$$M_{zz}(\mathbf{q}) = -\frac{2(1-\nu^2)}{Eq}. \tag{6.7}$$

M_{zz} の導出については付録 A に詳細を記述する。式(6.6)と式(6.7)を式(6.5)に代入する。その際、ゴムが路面凹凸に完全に追従すると仮定し、 $u_z(\mathbf{q}) \rightarrow h(\mathbf{q})$ とすると、

$$\begin{aligned}
 U_{\text{all}} &= -\frac{(2\pi)^2}{2} \int d^2q \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q})]^{-1} \\
 &= \frac{(2\pi)^2}{4} \int d^2q \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \frac{Eq}{(1-\nu^2)}, \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle$ は次の関係式を満たす。

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \tag{6.9}$$

式(6.9) の導出については付録 B に詳細を記述する。式(6.9)を式(6.8)に代入すれば、

$$\begin{aligned}
 U_{\text{all}} &= \frac{A_0}{4} \int d^2q q C(q) \frac{E}{(1-\nu^2)} \\
 &= \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^{q_1} dq q^2 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(\omega)}{(1-\nu^2)}, \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

ただし、すべり速度を v とすると、 $\omega = qv \cos \phi$ である。ここで、2.2節で導出した真実接触領域の割合 $P(q)$ を導入すると、

$$U_{\text{all}} = \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^{q_1} dq q^2 P(q) C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(\omega)}{(1-v^2)}. \quad (6.11)$$

式(6.11)は、各波数における弾性エネルギーを積算した形となっている。

ある波数 q_a における弾性エネルギー密度は、 $q < q_a$ の弾性エネルギー密度に波数 q_a による弾性エネルギー密度を加えたものと考えることができる。また、波数 q における代表高さ h_q を次のように定義する。

$$h_q = \left[4\pi \int_q^{q_1} dq' q' C(q') \right]^{1/2}, \quad (6.12)$$

ただし、 $h_{q_0} = h_0$ である。 h_q を用いて、波数 q における単位体積 V_q を次のように定義する。

$$V_q = A_0 P(q) h_q. \quad (6.13)$$

式(6.11)と式(6.13)より、波数 q の表面凹凸によりゴムに貯蔵される弾性エネルギー密度 $U_{\text{el}}(q)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} U_{\text{el}}(q) &= \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{1}{V_{q'}} q'^2 P(q') C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(q'v \cos \phi)}{(1-v^2)} \\ &= \frac{1}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{1}{h_{q'}} q'^2 C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(q'v \cos \phi)}{(1-v^2)}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

ただし、式(6.14)で表される弾性エネルギー密度はゴムの変形の最大波数を q としたものである。ここでは、カットオフ波数 q_1 を定めることが目的であり、 q_1 以上の波数領域ではゴムの変形は起こらないと仮定しているため、式(6.14)による弾性エネルギー密度の評価は妥当であると考えられる。

ここで、路面のセルフアフィンフラクタル性を仮定すると次式が成り立つ。

$$h_q = h_0 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-H}, \quad (6.15)$$

$$C(q) \approx \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)}. \quad (6.16)$$

式(6.15)と式(6.16)を式(6.14)に代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 U_{\text{el}}(q) &= \frac{1}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{q'^H}{h_0 q_0^H} q'^2 \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(q'v \cos \phi)}{(1-\nu^2)} \\
 &= \frac{H}{8\pi(1-\nu^2)} h_0 q_0^H \int_{q_0}^q dq' q'^{-H} \int_0^{2\pi} d\phi \text{Re} E(qv \cos \phi).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.2.3. 弾性エネルギー密度の計算

式(6.17)に基づき、弾性エネルギー密度 $U_{el}(q)$ を計算する。ただし、ここでは波数 q の代わりに $q = q_0\zeta$ で定義される倍率 ζ に対する弾性エネルギー密度 $U_{el}(\zeta)$ を計算する。Table 6-3 に計算条件を示す。Fig. 6-4 に路面 A における $U_{el}(\zeta)$ の計算結果を、Fig. 6-5 に路面 B における $U_{el}(\zeta)$ の計算結果を示す。

Fig. 6-4 と Fig. 6-5 から、速度が増加すると弾性エネルギー密度も増加することがわかる。これは、式(6.17)において、すべり速度 v の増加とともにゴムの貯蔵弾性率 $\text{Re } E(qv \cos \phi)$ が増加するためである (Fig. 4-5 参照)。また、高周波数帯域ではゴムの貯蔵弾性率は一定となる[28]ため、すべり速度が高速になるほど弾性エネルギー密度の速度依存性は小さくなると考える。本研究の摩擦試験の速度範囲 $1 < v < 10$ [mm/s] においては、路面 A の $\zeta = 200$ で $U_{el} = 123 \sim 158$ [MPa]、路面 B の $\zeta = 200$ で $U_{el} = 129 \sim 167$ [MPa] と、比較的高い速度依存性が見られた。

Fig. 6-6, Fig. 6-7 はそれぞれ、 $v = 1$ [mm/s]、 $v = 10$ [mm/s] における路面 A と路面 B の $U_{el}(\zeta)$ の比較である。Fig. 6-6 より、 $1 < \zeta < 105$ では路面 A の方が路面 B より U_{el} が大きく、 $105 < \zeta$ では路面 B の方が路面 A より大きい値を示した。Fig. 6-7 でも同様に、 $1 < \zeta < 103$ では路面 A の方が路面 B より U_{el} が大きく、 $103 < \zeta$ では路面 B の方が路面 A より大きい値を示した。これは、マクロな粗さは路面 A の方が大きく、ミクロスケールになるほどハースト数 H の関係により路面 B の粗さの方が大きくなることが原因と考える。

Table 6-3 Calculation conditions of elastic energy density.

		Surface A	Surface B
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
	H	0.49	0.40
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	$E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) - (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$	
	ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		300	
Sliding speed [mm/s]		1, 2, 3, 4, 5, 10	

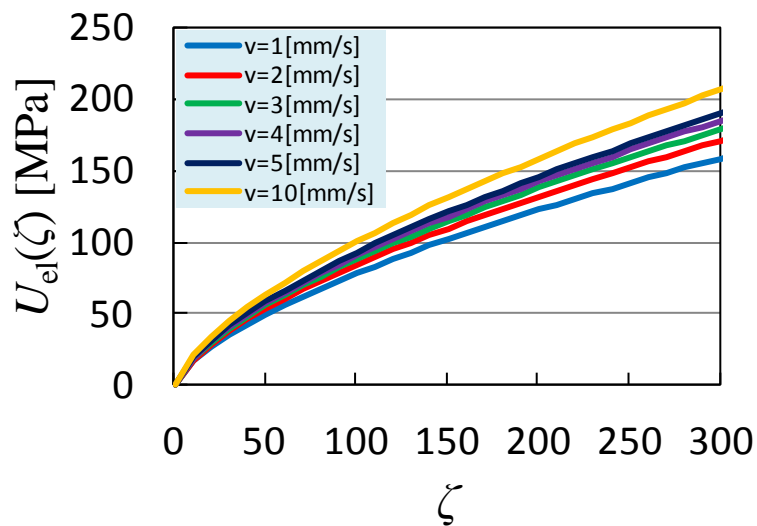


Fig. 6-4 Elastic energy density of a rubber sliding on surface A.

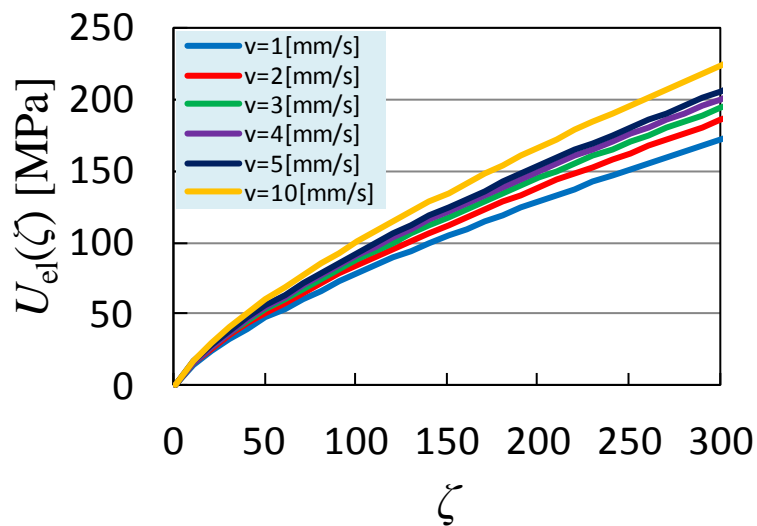


Fig. 6-5 Elastic energy density of a rubber sliding on surface B.

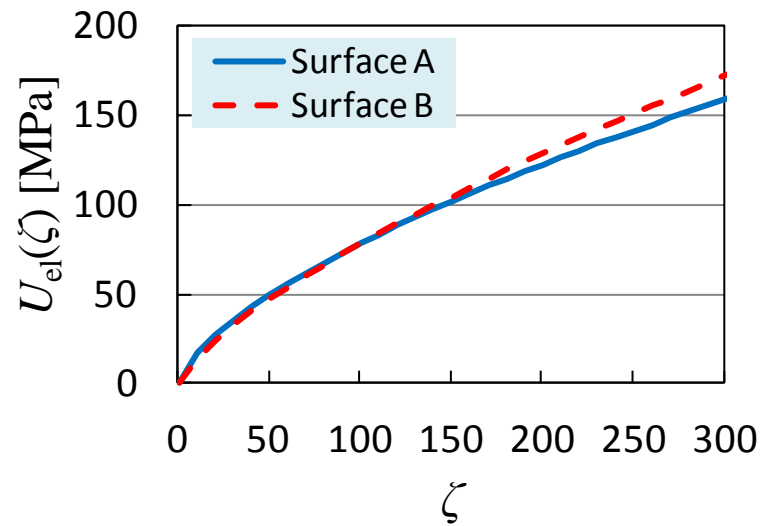


Fig. 6-6 Elastic energy density as a function of ζ at $v=1$ [mm/s].

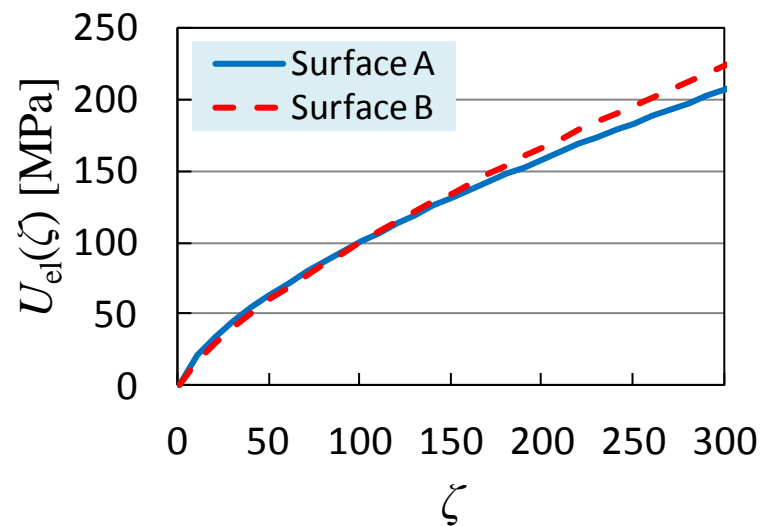


Fig. 6-7 Elastic energy density as a function of ζ at $v=10$ [mm/s].

6.2.4. 考察

計算結果から、弾性エネルギー密度はすべり速度および表面粗さに依存する。そのため、弾性エネルギーの上限値を設定し、それに対応する波数をカットオフ波数 q_1 とすると、 q_1 にも速度依存性と路面依存性が存在する。

本研究で行った摩擦試験の速度範囲は、 $1 < v < 10$ [mm/s] である。この領域では低速度ではゴムの温度変化は無視できるが、速度が大きくなるほどゴムの温度上昇の影響が出ることが予想される。ゴムの温度上昇の影響を無視すると、速度の増加とともに q_1 は減少するが、ゴムの温度が上昇すると Fig. 4-5 に示した周波数に対する複素弾性率が右にシフトし、弾性エネルギー密度は低下する。そのため、ゴムの温度上昇は q_1 を増加させる方向に働く。

6.1 節で示した通り、本モデルの摩擦係数にはカットオフ波数 q_1 依存性があり、 q_1 の設定によって摩擦係数の値は大きく変わる。Table 6-4 に各速度における試験結果と同じ摩擦係数となるように設定した ζ_{\max} を示す。Table 6-4 より、路面 B の $v = 2$ [mm/s] に合わせた ζ_{\max} の値が最も小さく、ゴムの温度上昇の影響が最も抑えられていると考える。そこで、本研究では、路面 B の $v = 2$ [mm/s] における摩擦試験結果の値に一致する ζ_{\max} から、その時の弾性エネルギー密度を上限値として各速度における ζ_{\max} を決定する。

具体的には、Table 6-4 より、路面 B、 $v = 2$ [mm/s] における摩擦試験結果は $\mu = 1.26$ であり、これと計算結果が一致するように ζ_{\max} を定めると、 $\zeta_{\max} = 127$ となる。このときの弾性エネルギー密度は $U_{el} = 9.94 \times 10^1$ [MPa] となる。よって、本モデルにおける摩擦係数の計算では、 $U_{el} = 9.94 \times 10^1$ [MPa] を弾性エネルギー密度の上限値として、各速度における ζ_{\max} を求めることとする。

Table 6-4 The maximum magnification conformed to the experimental data.

Surface	Sliding speed [mm/s]	Friction coefficient	Maximum magnification
A	1	1.12	147
A	2	1.42	200
A	3	1.51	209
A	4	1.45	187
A	5	1.40	170
A	10	1.46	156
B	2	1.26	127
B	3	1.40	142
B	4	1.60	166
B	5	1.69	172
B	10	1.64	146

6.3 摩擦モデルの数値計算による検討

6.3.1. 計算条件

6.2 節の議論を踏まえ摩擦係数の予測計算を行う。計算式は式(6.1), 式(6.2), 式(6.3)を用いる。Table 6-5 に本モデルにおける摩擦係数の計算条件を示す。ここで, カットオフ波数 q_1 については, 6.2.4 節より, 各速度において $U_{el} = 9.94 \times 10^1$ [MPa] により得られる ζ_{\max} から, $q_1 = q_0 \zeta_{\max}$ によって得る。

Table 6-5 Calculation conditions of friction coefficient.

		Surface A	Surface B
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
	H	0.48775	0.40485
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	$E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) - (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$	
	ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		300	
Cut off wave vector q_1		Determined by elastic energy density.	
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-5} \sim 1.0 \times 10^0$	

6.3.2. 真実接触領域の割合の計算

式(6.2), 式(6.3)と Table 6-5 に示した計算条件に基づき, 路面 A, 路面 B それぞれについて真実接触領域の割合を計算した結果を Fig. 6-8, Fig. 6-9 に示す。この結果から, 同一路面においてはすべり速度が大きいほど真実接触領域の割合は小さくなることがわかる。また, 各速度において路面間の $P(\zeta)$ を比較すると, $\zeta = 18 \sim 19$ までは路面 A の $P(\zeta)$ の方が小さく, 以降, ζ が大きくなるほど路面 B の $P(\zeta)$ の方が小さくなることがわかった。

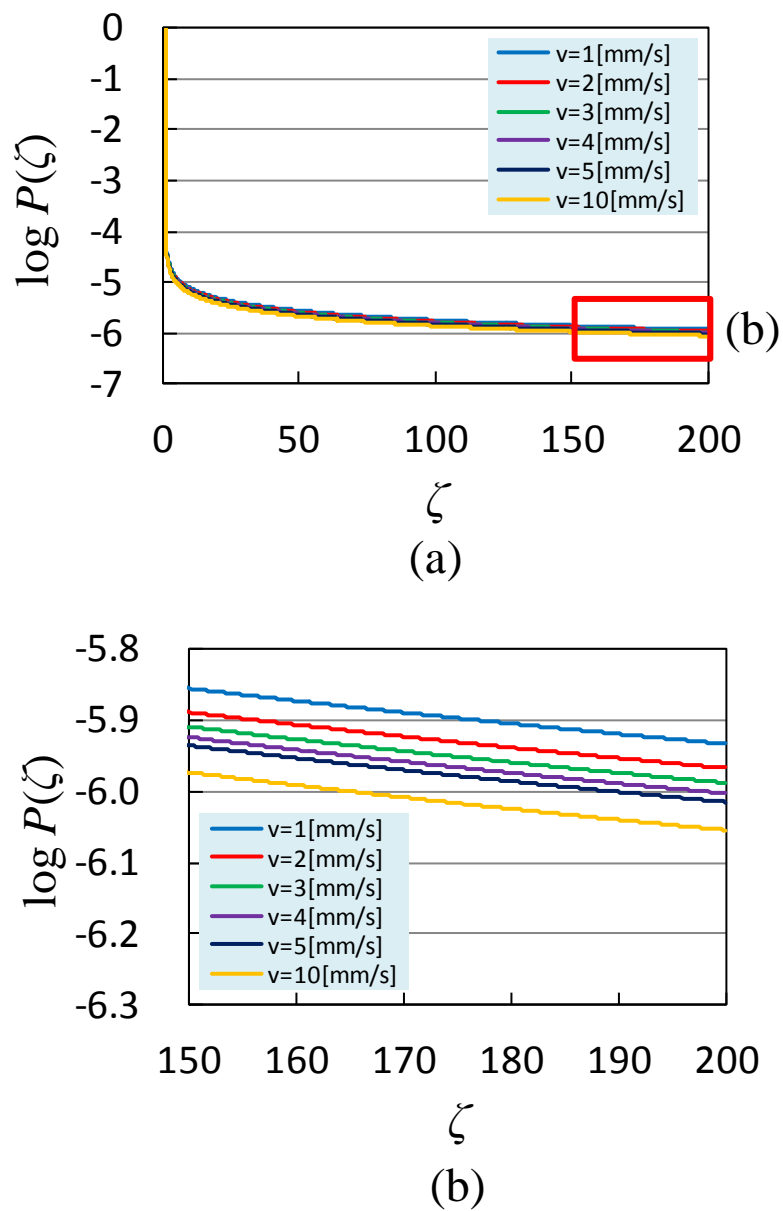


Fig. 6-8 (a) The fraction of real contact area for surface A, (b) the magnification of the insert area of (a).

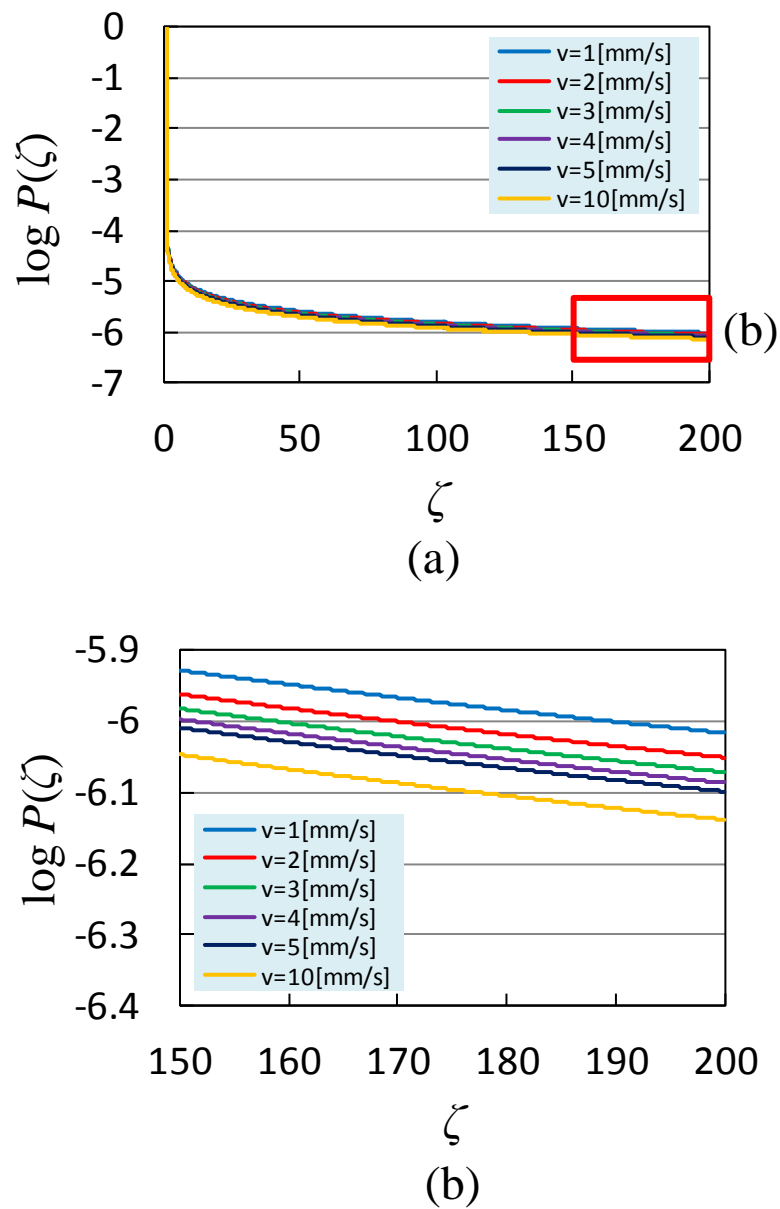


Fig. 6-9 (a) The fraction of real contact area for surface B, (b) the magnification of the insert area of (a).

6.3.3. 摩擦係数の計算

式(6.1), 式(6.2), 式(6.3)と 6.3.1 節に示した計算条件に基づき, 路面 A, 路面 B それぞれについて摩擦係数の計算を行う. Fig. 6-10 に弾性エネルギー密度の上限値を定めることによって求めた最大倍率 (カットオフ波数に対応) を, Fig. 6-11 に摩擦係数の計算結果を示す. Fig. 6-10 より, $1.0 \times 10^{-2} [\text{m/s}] > v$ では路面 A の ζ_{\max} の方が大きく, $1.0 \times 10^{-2} [\text{m/s}] < v$ では路面 B の ζ_{\max} の方が大きい. これは速度が大きいほどマクロな粗さによる弾性エネルギーの寄与が大きくなるためである. Fig. 6-11 から, この速度範囲では常に路面 B の摩擦係数の方が路面 A より大きいことがわかる. 路面 A の摩擦係数は 0.83~1.27, 路面 B の摩擦係数は 1.01~1.44 であり, その摩擦係数の差は, 平均で 0.173 である. このことから, 本摩擦モデルでは, ミクロの粗さの摩擦係数に対する寄与が大きいことがわかる.

また, 路面 A, 路面 B 共に一部の速度領域では速度の増加とともに摩擦係数は減少する. その速度領域は, 路面 A は $5.01 \times 10^{-4} < v < 3.55 \times 10^{-3} [\text{m/s}]$ であり, 路面 B は $3.98 \times 10^{-4} < v < 5.62 \times 10^{-3} [\text{m/s}]$ である. また, 速度が $v = 0 [\text{m/s}]$ に近づくと, 損失弾性率が 0 となるため, 摩擦係数の計算結果も 0 に漸近する.

本摩擦モデルでは, 摩擦試験における, 路面 B, $v = 2 [\text{mm/s}]$ の摩擦係数の値に計算結果が一致するように弾性エネルギー密度の上限値を設定している. 摩擦試験と同じ $1 < v < 10 [\text{mm/s}]$ の範囲の摩擦係数を見ると, 路面 A は 1.12~1.09, 路面 B は 1.28~1.24 であり, 摩擦係数の値として妥当な範囲であることがわかる.

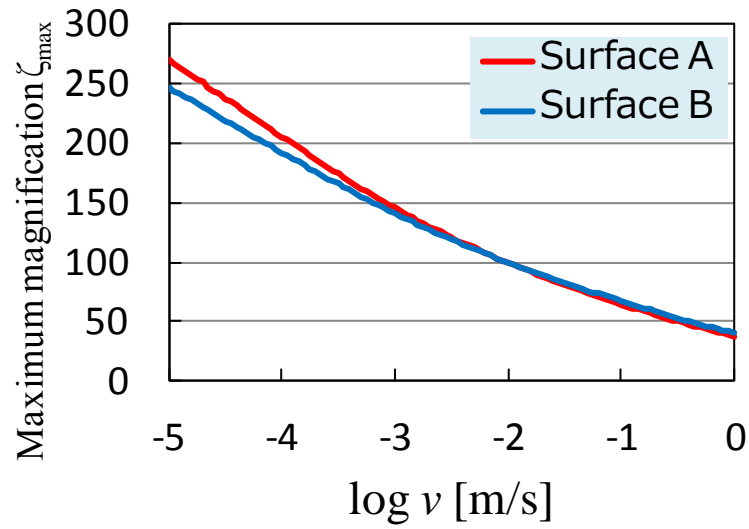


Fig. 6-10 Maximum magnification for sliding velocity.

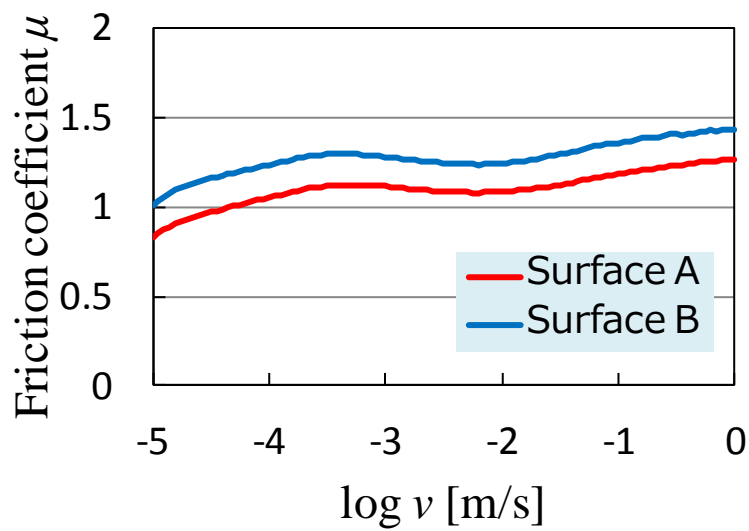


Fig. 6-11 Numerical results of friction coefficient.

6.4 摩擦試験と摩擦モデル計算の比較・検証

5章に示した摩擦試験結果と、本摩擦モデルによる摩擦係数の計算結果の比較を行う。Fig. 6-12 に摩擦試験結果を再掲し、Fig. 6-13 に本摩擦モデルによる摩擦係数の計算結果の内、摩擦試験と同じ速度範囲のものを示す。

Fig. 6-12 と Fig. 6-13 を比較すると、路面 B においては、 q_1 の設定上、 $v=2$ [mm/s] の摩擦係数が試験結果と計算結果で一致し、その値は 1.26 である。また、路面 A の $v=1$ [mm/s] においても、試験結果と計算結果がほぼ同じ 1.12 を示した。他の速度では試験結果の方が計算結果より大きい値を示した。また、摩擦係数の速度依存性を比べると、計算結果は若干の減少傾向を示すのに対し、試験結果は路面 A の $1 < v < 3$ [mm/s]、路面 B の $2 < v < 5$ [mm/s] で比較的大きい増加傾向が見られた。

路面間の摩擦係数の挙動を検証する。路面の平均粗さは路面 A の方が路面 B よりも大きく、マクロな粗さのみを考えると路面 A の方が大きい摩擦係数を示すと考えられる[22]。試験結果を見ると、Fig. 6-12 より、 $v=2, 3$ [mm/s] では路面 A の摩擦係数の方が路面 B より大きく、 $v=4 \sim 10$ [mm/s] では路面 B の摩擦係数の方が大きい。一方、摩擦モデルによる計算結果を見ると、Fig. 6-13 より、常に路面 B の摩擦係数の方が路面 A より大きい値を示している。このことから、路面 B の摩擦係数の方が路面 A より大きくなるという、マクロな粗さのみでは説明できない現象を、本摩擦モデルによって表すことができることがわかる。ただし、試験結果の摩擦係数の速度依存性を説明できないことから、この速度領域における実際の摩擦係数の評価は、摩擦力のヒステリシス項のみを考えた本摩擦モデルのみでは不十分であることがわかる。

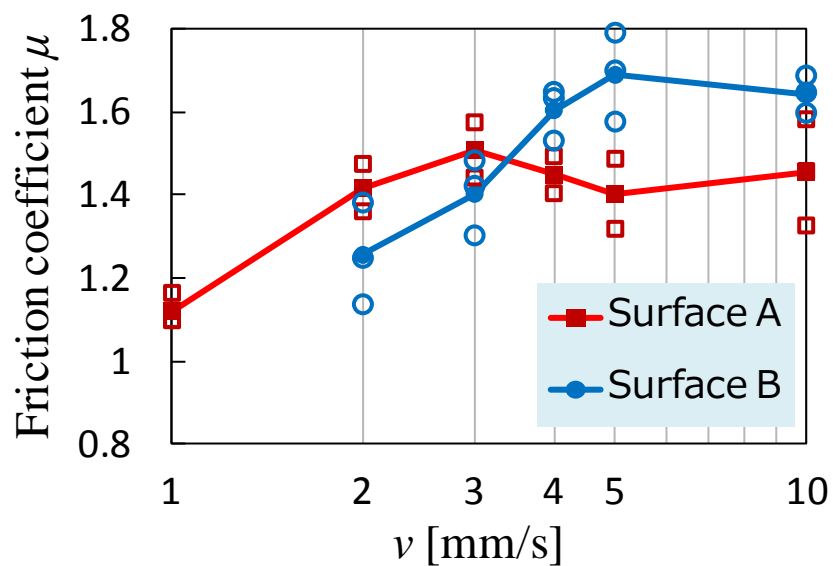


Fig. 6-12 Results of accelerating friction tests.

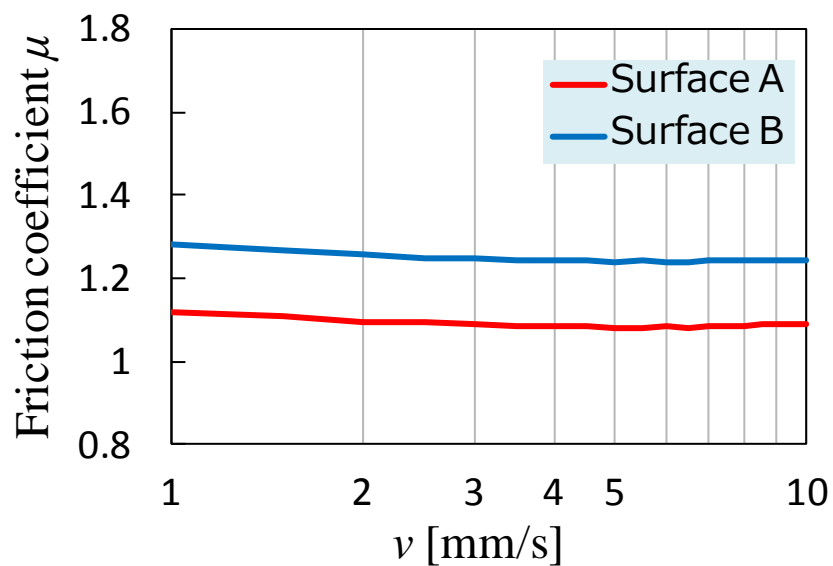


Fig. 6-13 Numerical results of friction coefficient.

6.5 ヒステリシス項以外の摩擦係数項の検証

6.5.1. 検証方法

Moore によると、固く粗い路面上をゴム材料がすべる際の摩擦力には、主として、路面とゴム表面の相互作用による凝着項とゴムのヒステリシスロスに起因するヒステリシス項が含まれる[38]。さらに、Moore は摩擦において凝着項のピークはすべり速度の低速度側に、ヒステリシス項のピークは高速度側に現れることを示した[39]。本摩擦モデルの計算では、摩擦係数のピークは、すべり速度のより高速度側で見られると予想されるので、Fig. 6-12 に示した試験結果で摩擦係数のピークが見える原因として凝着項の影響が考えられる。

6.2.1 節で述べた通り、Persson によれば、ゴムと路面の摩擦において凝着の効果は非常に小さい[12][34]。しかし、網野らによれば、乾燥状態で金網上を滑るゴムの摩擦力にはヒステリシス項以外の項の影響が認められる[40]。網野らはこれを凝着項として、せん断強さと関連付けた考察を行った。一方、Gabriel らは、摩擦力の凝着項とヒステリシス項に加え、表面のマクロな幾何形状が摩擦力に与える影響を示した。

以上を踏まえ、本研究では摩擦力 F_f が次のように分解できると仮定する。

$$F_f = F_{\text{hysteresis}} + F_{\text{macro}}, \quad (6.18)$$

ここで、 $F_{\text{hysteresis}}$ は本研究における摩擦モデルによる摩擦力であり、 F_{macro} はマクロの幾何形状や凝着など、ヒステリシスロス以外の要因による摩擦力である。式(6.18)を摩擦係数に書き換えると次式を得る。

$$\mu = \mu_{\text{hysteresis}} + \mu_{\text{macro}}. \quad (6.19)$$

以降、 μ_{macro} を摩擦係数のマクロ項と呼ぶこととする。Fig. 6-12 の試験結果から Fig. 6-13 の計算結果を差し引くことで、 μ_{macro} の評価を行う。弾性エネルギー密度の上限値の取り方によって摩擦係数の計算結果は大きく変わるため、 μ_{macro} の定量的な評価は難しいが、路面やすべり速度依存性に対する相対的・定性的評価は可能である。

6.5.2. 検証結果

Fig. 6-14 に摩擦試験結果と本モデルの摩擦係数の計算結果を示す。また、試験結果から計算結果を差し引くことで求めた摩擦係数のマクロ項を Fig. 6-15 に示す。

Fig. 6-15 より、路面 A と路面 B の摩擦係数のマクロ項の最大値の差は 3.0×10^{-3} と非常に小さい。最大値を示す速度は、路面 A は $v = 3$ [mm/s]、路面 B は $v = 5$ [mm/s] であった。Moore は摩擦係数の凝着項のピークが低速度側にあると述べ、さらにその温度依存性を示した[39]。このことから、路面 A よりも路面 B の方が摩擦試験において大きなゴムの温度上昇をもたらした可能性が考えられる。

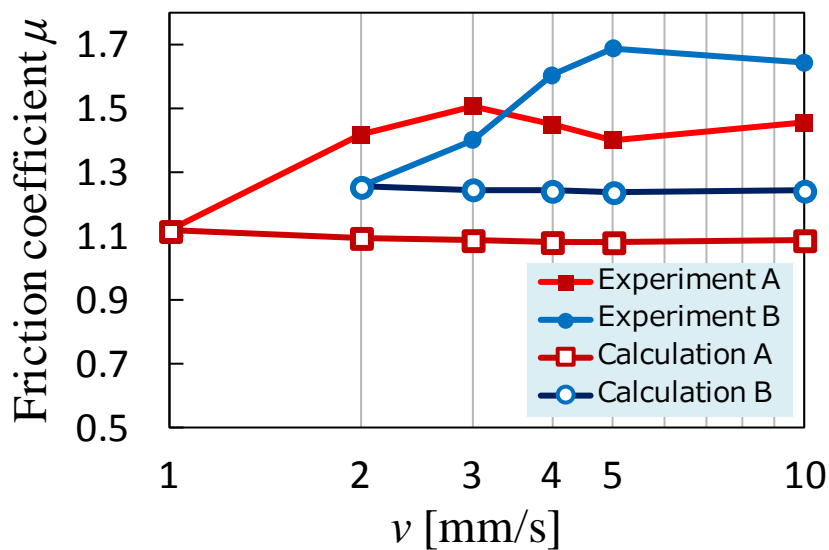


Fig. 6-14 Experimental and numerical results of friction coefficient.

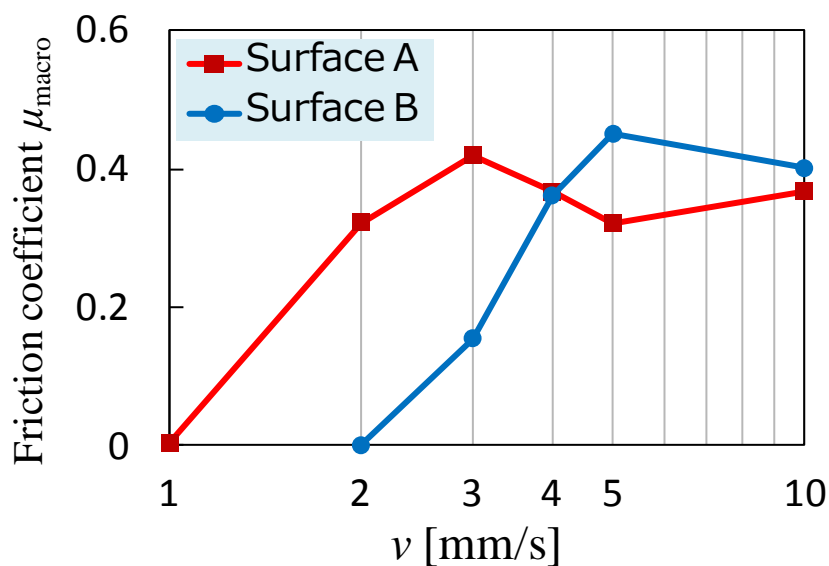


Fig. 6-15 Macro term of friction coefficient.

7 考察と今後の展望

7.1 考察

本研究では、Persson の摩擦理論を基に、弾性エネルギー密度を考慮した摩擦理論を構築した。その理論に、実際の路面・ゴム物性の条件を適用し、摩擦係数の予測計算を行い、摩擦試験の結果との比較・検証を行った。

摩擦係数の予測計算では、路面のミクロスケールの粗さの寄与が大きい計算結果となり、摩擦試験の結果にもミクロ粗さの影響が見られる点で、摩擦特性の一部を表現することができたと言える。

弾性エネルギー密度によるカットオフ波数決定法では、一つの基準の弾性エネルギー密度を上限値として設定すれば、各速度におけるカットオフ波数を定めることができる。しかし、弾性エネルギー密度の上限値は、現在は摩擦試験の結果に合わせることで得られるのみである。6.5 節の摩擦係数のマクロ項の存在を考慮すると、実用的な摩擦係数予測のためには、他の明確な基準が必要である。本摩擦モデルによる摩擦係数の計算においては、Fig. 6-10 より、 $270 < \zeta_{\max} < 38$ 、つまり考慮する路面最小波長が $3.2[\mu\text{m}] < \lambda_{\min} < 22[\mu\text{m}]$ の範囲であった。これは、充てん剤の粒径が $2 \times 10^{-2}[\mu\text{m}]$ 程度である[17]ことを考えると、 $10^2 \sim 10^3$ のスケール差があり、ゴムの破壊現象に関連したモード 1 が支配的であるという仮定が妥当であることがわかる。本摩擦モデルのカットオフ波数決定法の有効性を検証するためには、本研究で用いた路面サンプルとは路面粗さが大きく異なるサンプルを用いた計算と摩擦試験との比較が必要であると考ええる。また、異なるゴム種においては、充てん剤と強度の間には強い相関があり[37]、それぞれ弾性エネルギー密度の上限値が異なると考えられる。ゴムの破壊現象の根本原因は不均質なゴム内部構造に存在するため、そのようなミクロ領域で起こる現象の理解が重要であると考ええる。

Persson の理論では摩擦力のヒステリシス項のみを考えているため、それを基に構築した本摩擦モデルにおいても摩擦試験の結果を説明できない部分が存在した。そこで網野ら[40]の摩擦機構に関する研究を参考に、摩擦試験の結果から本摩擦モデルで計算した摩擦係数のヒステリシス項を差し引くことで、摩擦係数のマクロ項を評価した。その結果、マクロ項のピークが路面 A より路面 B の方が高速度側に出ていることから、路面 B での摩擦の方がゴムの温度上昇が大きい可能性が示唆される。今後、マクロ項とヒステリシス項の摩擦係数全体に対する割合やそれぞれの絶対的な値を理論的に定めることができれば、さらに精度の高い、実用的な摩擦係数予測手法となると考えられる。

7.2 今後の展望

摩擦現象は、非常に多くの要因が複雑に絡まり合って発現している。そのため、摩擦係数を理論的に予測することは難しく、本研究の摩擦モデルにおいても、路面特性に起因する摩擦現象の一部を説明するに留まっている。材料特性の違いに起因する本摩擦モデルを用いた摩擦特性の評価を実施することで得られる知見もあると考える。また、摩耗などのゴムの破壊現象と摩擦性能との関係性についても検証する必要がある。本モデルにおいては弾性エネルギー密度という概念を導入したが、例えばそれを超える波数領域で起こっている現象を詳細にモデル化できれば、更なる摩擦モデルの改良が見込まれる。

今後、摩擦モデルの改良やゴム内部構造の解明により、より正確に摩擦現象が記述できるようになれば、その摩擦モデルを用いたシミュレーションや材料開発を通じ、タイヤ開発が更なる発展を遂げるであろう。

8 結論

本研究の結論を以下に述べる.

- ・路面サンプルの表面データから路面表面粗さパワースペクトルを計算し, 路面特性を得た.
- ・粘弾性試験の結果を一般化マクスウェルモデルで表現し, ゴム試験片の粘弾性特性を得た.
- ・上記路面サンプルとゴム試験片による摩擦試験を実施し, 摩擦係数を得た.
- ・Persson の摩擦モデルに弾性エネルギー密度の概念を導入し, 相対的なカットオフ波数決定法を取り入れた摩擦モデル構築した.
- ・構築した摩擦モデルに, 上記で得られた路面特性と粘弾性特性を計算条件として取り入れ, 摩擦係数の予測計算を行った.
- ・摩擦試験結果と計算結果を比較し, 本モデルがミクロスケールの路面粗さに起因する摩擦特性を表現することを確認した.
- ・摩擦試験と計算結果の差を摩擦係数のマクロ項として評価することで, マクロ粗さや凝着が摩擦に及ぼす影響を評価した.

付録 A: 剛性マトリクス M の導出

ゴムを等方弾性体と仮定すると、その表面 $z=0$ 上の変位場 u_i と表面にかかる応力テンソル $\sigma_i (= \sigma_{3i})$ のフーリエ変換をそれぞれ次のように定義する。

$$u_i(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\sigma_i(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \sigma_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x, y)$ は平面の位置ベクトル、 $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ は 2 次元の波数ベクトル、 t は時間、 ω は角速度である。これらのフーリエ逆変換は次のように表される。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int d^2q d\omega u_i(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \int d^2q d\omega \sigma_i(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)}.$$

表面応力に対する変位場は次の式で計算される。

$$u_i(\mathbf{q}, \omega) = M_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_j(\mathbf{q}, \omega),$$

または行列表記で、

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = M(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{A.1})$$

連続体力学の理論から $M(\mathbf{q}, \omega)$ を求める。Navier の方程式より、変位場 $u_i(\mathbf{x}, z, t)$ は次の式を満たす。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \hat{\mu} \nabla^2 \mathbf{u} + (\hat{\mu} + \hat{\lambda}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

ここで、 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\lambda}$ は Lamé の定数であり、任意の関数 $\phi(t)$ に対して次の式を満たす。

$$\hat{\mu} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(t-t') \phi(t').$$

上記の Navier の方程式を t に関してフーリエ変換すると、

$$-\rho \omega^2 \mathbf{u} = \mu(\omega) \nabla^2 \mathbf{u} + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)] \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, \omega)$ 、 $\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mu(t) e^{i\omega t}$ 、 $\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \lambda(t) e^{i\omega t}$ である。また、 μ 、 λ は、複素弾性率 $E(\omega)$ とポアソン比 $\nu(\omega)$ を用いて次のように表される。

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{A.3})$$

さらに、横波の音速 $c_T(\omega)$ と縦波の音速 $c_L(\omega)$ は次のように表される。

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}, c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (\text{A.4})$$

ここで、ベクトル \mathbf{n} を導入する。 \mathbf{n} は z 軸方向を指し、半無限固体の表面に垂直である。さらに直交基底、 $\mathbf{p} = -i\nabla$ 、 $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{p}$ 、 $\mathbf{p} \times \mathbf{K}$ によって変位場 \mathbf{u} を次のように表す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C. \quad (\text{A.5})$$

式(A.5)を式(A.2)に代入して、

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2(\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C) &= \mu(\omega)\nabla^2(\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C) \\ &\quad + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot (\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C). \end{aligned}$$

A についてまとめると、

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\mathbf{p}A &= \mu(\omega)\nabla^2\mathbf{p}A + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot \mathbf{p}A \\ \Leftrightarrow \left(\omega^2 + \frac{[\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)]}{\rho} \nabla^2 \right) \mathbf{p}A &= 0 \\ (\because \nabla\nabla \cdot \mathbf{p}A &= \nabla\nabla \cdot (-i\nabla A) = (-i\nabla)\nabla^2 A = \mathbf{p}\nabla^2 A) \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + c_L^2\nabla^2) \mathbf{p}A &= 0. \end{aligned}$$

B についてまとめると、

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\mathbf{K}B &= \mu(\omega)\nabla^2\mathbf{K}B + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot \mathbf{K}B \\ \Leftrightarrow \left(\omega^2 + \frac{\mu(\omega)}{\rho} \nabla^2 \right) \mathbf{K}B &= 0 \\ (\because \nabla \cdot \mathbf{K}B &= \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p})B = -i\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \nabla)B = 0) \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + c_T^2\nabla^2) \mathbf{K}B &= 0. \end{aligned}$$

C についてまとめると、

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C &= \mu(\omega)\nabla^2(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C \\ \Leftrightarrow \left(\omega^2 + \frac{\mu(\omega)}{\rho} \nabla^2 \right) (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C &= 0 \\ (\because \nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C &= -i\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{K})C = 0) \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + c_T^2\nabla^2) (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C &= 0. \end{aligned}$$

以上より、

$$(\omega^2 + c_L^2\nabla^2)\mathbf{p}A + (\omega^2 + c_T^2\nabla^2)\mathbf{K}B + (\omega^2 + c_T^2\nabla^2)(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C = 0,$$

ここで, \mathbf{p} , \mathbf{K} , $\mathbf{p} \times \mathbf{K}$ は互いに独立なので,

$$(\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) A = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$(\omega^2 + c_T^2 \nabla^2) B = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$(\omega^2 + c_T^2 \nabla^2) C = 0. \quad (\text{A.8})$$

z 方向の変形が波状であるとして, $A(\mathbf{x}, z, \omega) = A(\mathbf{x}, \omega) e^{ip_L z}$ と変数分離すると, 式(A.6)より,

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) A(\mathbf{x}, \omega) e^{ip_L z} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) \int d^2 q A(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \omega^2 - c_L^2 (q^2 + p_L^2) \right\} \int d^2 q A(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z)} = 0 \\ & \left(\because \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, q^2 = |\mathbf{q}^2| = q_x^2 + q_y^2 \right) \\ \Leftrightarrow & \left\{ \omega^2 - c_L^2 (q^2 + p_L^2) \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow & p_L = \mp \left(\frac{\omega^2}{c_L^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

よって,

$$A(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2 q d\omega A(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z - \omega t)}, \quad (\text{A.9})$$

ただし,

$$p_L = \mp \left(\frac{\omega^2}{c_L^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.10})$$

同様にして,

$$B(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2 q d\omega B(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_T z - \omega t)}, \quad (\text{A.11})$$

$$C(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2 q d\omega C(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_T z - \omega t)}, \quad (\text{A.12})$$

ただし,

$$p_T = \mp \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.13})$$

ここで, $\boldsymbol{\varepsilon}$ はブランチカットを考慮した微小項である. また, p_T と p_L の $-$, $+$ はそれぞれ $\omega > 0, \omega < 0$ に対応している.

Hook の法則より,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}.$$

弾性体が等方であれば,

$$C_{ijkl} = \hat{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

の形をとり,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \hat{\lambda} e_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu} e_{ij} \\ &= \hat{\mu} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \hat{\lambda} u_{k,k} \delta_{ij} \quad \left(\because e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right). \end{aligned}$$

よって,

$$\sigma_{i3} = n_j \sigma_{ij} = \hat{\mu} (\mathbf{n} \cdot \nabla u_i + \nabla_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + \hat{\lambda} n_i \nabla \cdot \mathbf{u},$$

ここで, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\nabla_i = \partial / \partial x_i$ である. 両辺に $-i$ をかけて,

$$\begin{aligned} -i\sigma_{i3} &= \hat{\mu} \{ \mathbf{n} \cdot (-i\nabla) u_i + (-i\nabla_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \} + \hat{\lambda} n_i (-i\nabla) \cdot \mathbf{u} \\ \Leftrightarrow -i\sigma_{i3} &= \hat{\mu} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) u_i + \mathbf{p}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \} + \hat{\lambda} n_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) \quad (\because -i\nabla = \mathbf{p}). \end{aligned}$$

この式の両辺を t に関してフーリエ変換し, ベクトル表示すると, $\sigma_{3i}(\mathbf{x}, 0, \omega) = \sigma_i(\mathbf{x}, \omega)$ は次の形をとる.

$$\mu(\omega) \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{u} + \mathbf{p} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \} + \lambda(\omega) \mathbf{n} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) = -i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.14})$$

ここで, 式(A.5)より,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = p_z,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = u_z$$

$$= p_z A + \mathbf{K}_z B + (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z C$$

$$= p_z A + (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z C$$

$$\left(\because \mathbf{K}_z = (\mathbf{n} \times \mathbf{p})_z = -i \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right)_z = 0 \right)$$

$$= p_z A + K^2 C$$

$$\left(\because (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z = - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_z = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = K^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} &= p^2 A + \mathbf{p} \cdot \mathbf{K} B + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K}) C \\ &= p^2 A \\ &(\because \mathbf{p} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) = 0, \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K}) = 0). \end{aligned}$$

これらを用いて、式(A.5)を式(A.14)に代入し、整理すると、

$$\mathbf{p} (2p_z A + K^2 C) + \mathbf{K} p_z B + \mathbf{p} \times \mathbf{K} p_z C + \mathbf{n} (\lambda/\mu) p^2 A = (-i/\mu) \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.15})$$

式(A.15)に、 \mathbf{n} , \mathbf{K} , $\mathbf{p}_{\parallel} = (p_x, p_y, 0)$ の内積をとることで次の 3 つのスカラー方程式を得る.

$$(2p_z^2 + (\lambda/\mu) p^2) A + 2K^2 p_z C = (-i/\mu) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.16})$$

$$K^2 p_z B = (-i/\mu) \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.17})$$

$$p_{\parallel}^2 (2p_z A + K^2 C) - p_z^2 K^2 C = (-i/\mu) \mathbf{p}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.18})$$

ここで、

$$K^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = p_{\parallel}^2.$$

式(A.6)より、

$$\begin{aligned} (\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) A &= 0 \\ \Leftrightarrow -\nabla^2 A &= \frac{\omega^2}{c_L^2} A \\ \Leftrightarrow p^2 A &= \frac{\omega^2}{c_L^2} A. \end{aligned}$$

任意の関数 $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\parallel} f(x) &= \mathbf{p}_{\parallel} \int d^2 q f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= (-i) \cdot i\mathbf{q} \int d^2 q f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{q} f(x). \end{aligned}$$

式(A.9), 式(A.11), 式(A.12)より、

$$p_z A = p_L A, \quad p_z B = p_T B, \quad p_z C = p_T C.$$

これらを用いると、式(A.16), 式(A.17), 式(A.18)はそれぞれ次のようになる.

$$\left(2p_L^2 + (\lambda/\mu)(\omega/c_L)^2\right)A + 2q^2 p_T C = (-i/\mu)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.19})$$

$$q^2 p_T B = (-i/\mu)\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.20})$$

$$q^2 (2p_L A + q^2 C) - p_T^2 q^2 C = (-i/\mu)\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

これらを \mathbf{x} に関してフーリエ変換しても式の形は変わらない. 以降, $A = A(\mathbf{q}, \omega)$ とする. B , C , $\boldsymbol{\sigma}$ についても同様とする. 式(A.20)より,

$$B = -\frac{i}{\mu} \frac{1}{q^2 p_T} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.22})$$

式(A.19)と式(A.21)を連立して,

$$A = -\frac{i}{\mu S} \left[2p_T \mathbf{q} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{n} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.23})$$

$$C = -\frac{i}{\mu S} \left[2p_L \mathbf{n} - \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \frac{1}{q^2} \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.24})$$

ただし,

$$S = \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L.$$

今,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \mathbf{K} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})\mathbf{n} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{p} \\ &= p^2 \mathbf{n} - p_z \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} -p_x p_z \\ -p_y p_z \\ p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} p_z \end{aligned}$$

$$= \mathbf{n}p_{\parallel}^2 - p_z \mathbf{p}_{\parallel}.$$

よって、式(A.5)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, 0, \omega) &= \mathbf{p}_{\parallel} A + \mathbf{n}p_z A + \mathbf{K}B + (\mathbf{n}p_{\parallel}^2 - p_z \mathbf{p}_{\parallel})C \\ &= \mathbf{q}A + \mathbf{n}p_L A + \mathbf{K}B + \mathbf{n}q^2 C - p_T C \mathbf{q} \\ &\quad (\because \mathbf{p}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{q}, p_z A = p_L A, p_z C = p_T C) \\ &= \mathbf{K}B + \mathbf{q}(A - p_T C) + \mathbf{n}(p_L A + q^2 C), \end{aligned} \tag{A.25}$$

ここで、

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{p} = -i \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right).$$

よって、フーリエ変換を利用すると、

$$\mathbf{K} = (-q_y, q_x, 0),$$

ここで、 $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$, $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{q}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (0, 0, 1) \times \frac{1}{q} (q_x, q_y, q_z) \\ &= \frac{1}{q} (-q_y, q_x, 0), \end{aligned}$$

より、

$$\mathbf{K} = q\mathbf{e}.$$

よって、式(A.22)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{K}B &= -\frac{i}{\mu} \frac{1}{q^2 p_T} q^2 \mathbf{e}\mathbf{e}\sigma \\ &= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{p_T} \mathbf{e}\mathbf{e}\sigma \quad (\because \mu = c_T^2 \rho). \end{aligned} \tag{A.26}$$

ここで、 $\mathbf{e}\mathbf{e}$ はダイアド積であり、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、ダイアド積 A は次のように定義される。

$$A = \mathbf{a}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

また、式(A.23), 式(A.24)より、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{q}(A - c_T C) \\
&= -\frac{i}{\mu S} \mathbf{q} \left[2p_T \mathbf{q} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{n} - 2p_T p_L \mathbf{n} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \frac{p_T}{q^2} \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{S} \mathbf{q} \left[\mathbf{q} \frac{1}{q^2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T - \mathbf{n} Q \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S} \left[\left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T \hat{q} \hat{q} - Q \mathbf{q} \hat{z} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma},
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{n}(p_L A + q^2 C) \\
&= -\frac{i}{\mu S} \mathbf{n} \left[2p_T p_L q + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) p_L \mathbf{n} + 2p_L q^2 \mathbf{n} - \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{S} \mathbf{n} \left[\mathbf{q} Q + \mathbf{n} \frac{\omega^2}{c_T^2} p_L \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S} \left[Q \hat{z} \mathbf{q} + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_L \hat{z} \hat{z} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma},
\end{aligned} \tag{A.28}$$

ただし,

$$Q = 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L.$$

式(A.25)に式(A.26), 式(A.27), 式(A.28)を代入して, $\mathbf{u}(\mathbf{q}, 0, \omega) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega)$ が次のように得られる.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{p_T} \mathbf{e} \mathbf{e} \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S} \left[\left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T \hat{q} \hat{q} - Q \mathbf{q} \hat{z} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&\quad - \frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S} \left[Q \hat{z} \mathbf{q} + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_L \hat{z} \hat{z} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S} \left[Q(\hat{z} \mathbf{q} - \mathbf{q} \hat{z}) + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 (p_L \hat{z} \hat{z} + p_T \hat{q} \hat{q}) \right] + \frac{1}{p_T} \mathbf{e} \mathbf{e} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

よって,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = M(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega),$$

と書けば,

$$M = -\frac{i}{\rho c_T^2} \left(\frac{1}{S(q, \omega)} \left[Q(q, \omega) (\hat{z}\mathbf{q} - \mathbf{q}\hat{z}) + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 (p_L \hat{z}\hat{z} + p_T \hat{q}\hat{q}) \right] + \frac{1}{p_T} \mathbf{e}\mathbf{e} \right), \quad (\text{A.30})$$

ただし, $\hat{z} = \mathbf{n}$, $\hat{q} = \mathbf{q}/q$, $\mathbf{e} = \hat{z} \times \hat{q}$ であり,

$$S = \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L,$$

$$Q = 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L.$$

さらに, すべり摩擦において, ゴム表面にかかる応力 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega)$ は z 方向成分のみを持つと仮定すると,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{A.31})$$

$M_{zz}(\mathbf{q}, \omega)$ を導出する. 式(A.43)において,

$$\begin{aligned} \hat{z}\mathbf{q} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_x & q_y & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}\hat{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_x \\ 0 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{z}\hat{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{q}\hat{q} &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q_x^2 & q_x q_y & 0 \\ q_x q_y & q_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}\mathbf{e} &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q_y^2 & -q_x q_y & 0 \\ -q_x q_y & q_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{p_L}{S(q, \omega)} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2. \quad (\text{A.32})$$

実際の条件の下では, ゴムと路面間の摩擦について, 次の近似が成り立つ.

$$\frac{\omega}{c_T q} = \frac{v}{c_T} \ll 1.$$

この近似条件は, すべり速度が横波の音速よりもかなり遅いということである. この条件下で, 式(A.25)より,

$$\begin{aligned}
p_T &= \mp \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= iq \left(1 - \frac{\omega^2}{c_T^2 q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq iq \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right).
\end{aligned}$$

同様に, 式(A.22)より,

$$p_L \simeq iq \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right).$$

また, これらを用いて,

$$\begin{aligned}
Q &= 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L \\
&\simeq 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \\
&= \frac{\omega^2}{c_L^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \\
&\simeq \frac{\omega^2}{c_L^2}, \\
S &= \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L \\
&\simeq \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 - 4q^4 \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \\
&= 2q^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left(\frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2} \right) \\
&\simeq 2q^2 \omega^2 \left(\frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2} \right).
\end{aligned}$$

これらを式(A.32)に代入して,

$$\begin{aligned}
M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{i}{\rho c_T^2} i q \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2}\right) \frac{1}{2q^2 \omega^2} \left(\frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2}\right)^{-1} \left(\frac{\omega}{c_T}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2\rho c_T^2 q} \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2}\right) \left[1 - \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2\right]^{-1} \\
&\simeq -\frac{1}{2\rho c_T^2 q} \left[1 - \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

さらに, 式(A.3), 式(A.4)を用いて,

$$\begin{aligned}
M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{1}{2\rho q} \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \left[1 - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\right]^{-1} \\
&= -\frac{2(1-\nu^2)}{Eq}.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

付録 B: パワースペクトル関係式の導出

次式の導出を行う。

$$\langle h(\mathbf{q})h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q).$$

表面粗さパワースペクトルは次のように定義される。

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x} + \mathbf{x}')h(\mathbf{x}') \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{B.1})$$

$h(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ や $h(\mathbf{x}')$ はフーリエ変換によって次のように表される。

$$h(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \int d^2q' h(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{x}')}, \quad (\text{B.2})$$

$$h(\mathbf{x}') = \int d^2q'' h(\mathbf{q}'') e^{i\mathbf{q}''\cdot\mathbf{x}'}$$

式(B.2)を式(B.1)に代入すると,

$$\begin{aligned} C(q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2q' \int d^2q'' \int d^2x \langle h(\mathbf{q}')h(\mathbf{q}'') \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + i\mathbf{q}''\cdot\mathbf{x}'} \\ &= \int d^2q' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}')h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'')\cdot\mathbf{x}'} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x e^{i(\mathbf{q}' - \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int d^2q' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}')h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'')\cdot\mathbf{x}'} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \\ &= \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}'')h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}'')\cdot\mathbf{x}'}. \end{aligned}$$

$C(q)$ は \mathbf{x}' の取り方に依存しないので, \mathbf{x}' にわたって積分し公称接触面積 A_0 で除しても値は変わらない。よって,

$$\begin{aligned} C(q) &= \frac{1}{A_0} \int d^2x' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}'')h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}'')\cdot\mathbf{x}'} \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}'')h(\mathbf{q}'') \rangle (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'') \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q})h(-\mathbf{q}) \rangle. \end{aligned}$$

したがって,

$$\langle h(\mathbf{q})h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q).$$

付録 C：摩擦係数の垂直応力依存性

Persson の摩擦モデルにおいて摩擦係数が垂直応力に依存しないことを検証する。Table C-1 に計算条件を示す。

Table C-1 Calculation conditions of friction coefficient with several normal stress.

		Surface A
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}
	H	0.48775
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	$E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) - (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$
	ν	0.49
Normal stress σ_0 [Pa]		300, 600, 1000
Cut off wave vector q_1		$q_0 \times 147$
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-5} \sim 5.53 \times 10^{-1}$

計算結果を示す。図から 3 本のグラフがほぼ一致し、摩擦係数が垂直応力に依存しないことが確認された。また異なる垂直応力間の摩擦係数の差は最大で 9.14×10^{-7} と非常に小さい値であった。

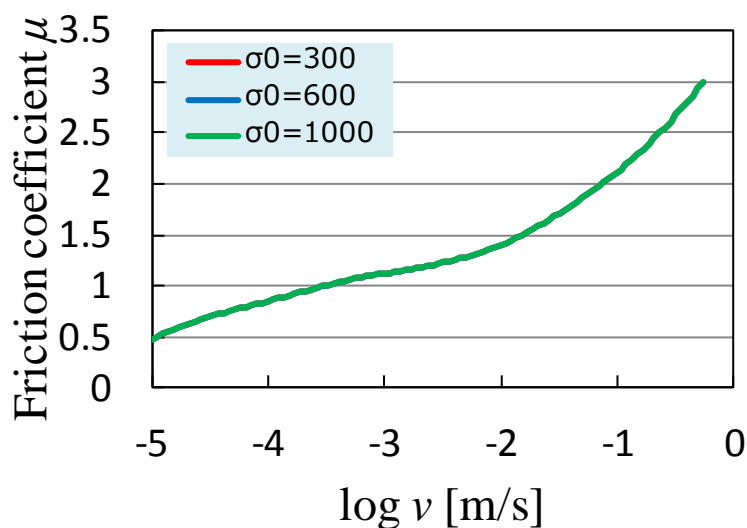


Fig. C-1 Numerical results of friction coefficient with various normal stress.

付録 D: カットオフ波数 q_1 一定の摩擦係数

本章では、すべり速度依存性を無視し、 q_1 を路面ごとに一定として摩擦係数の計算を行う。具体的には、試験結果に対応させ、路面 A の $v=1$ [mm/s] における摩擦係数の計算結果が 1.12 となるように ζ_{\max} を設定し $\zeta_{\max}=147$ を得る。このときの弾性エネルギー密度 $U_{el}=1.00 \times 10^2$ [MPa] より、路面 B においては $\zeta_{\max}=142$ を得る。各路面の ζ_{\max} を、上記で一定として摩擦係数の計算を行う。これにより、Persson のモデルによる摩擦係数の挙動を検証する。Table D-1 に計算条件を示す。ここではすべり速度の範囲については、路面 A におけるカットオフ波数 $q_1 = q_0 \times 147$ を考慮して、摩擦係数の計算が可能なすべり速度の最大値を Fig. 4-5 の f_{\max} を基に $v_{\max} = 2\pi f_{\max} / q_1 \approx 5.53 \times 10^{-1}$ とした。

Table D-1 Calculation conditions of friction coefficient with constant q_1 .

		Surface A	Surface B
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
	H	0.48775	0.40485
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	$E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) - (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$	
	ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		300	
Cut off wave vector q_1		$q_0 \times 147$	$q_0 \times 142$
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-5} \sim 5.53 \times 10^{-1}$	

式(6.1), 式(6.2), 式(6.3)と Table D-1 に示した計算条件に基づき、路面 A, 路面 B それぞれについて摩擦係数の計算を行った。Table D-1 に計算結果を示す。計算結果から、この速度範囲では常に路面 B の摩擦係数の方が路面 A より大きいことがわかる。路面間の摩擦係数の差はすべり速度が大きくなるほど増加し、0.1~0.39 であった。このことから、Persson の摩擦モデルも本モデルと同様に、ミクロの粗さの摩擦係数に対する寄与が大きいことがわかる。また、路面 A, 路面 B 共に速度の増加とともに摩擦係数は単調に増加し、路面 A の摩擦係数は 0.47~2.45, 路面 B の摩擦係数は 0.57~2.83 であった。損失弾性率のピークが現れるような高周波数帯域までカバーした複素弾性率データを用い、より高いすべり速度領域の摩擦係数を計算すれば、計算上の摩擦係数にピークが現れると考えられる。

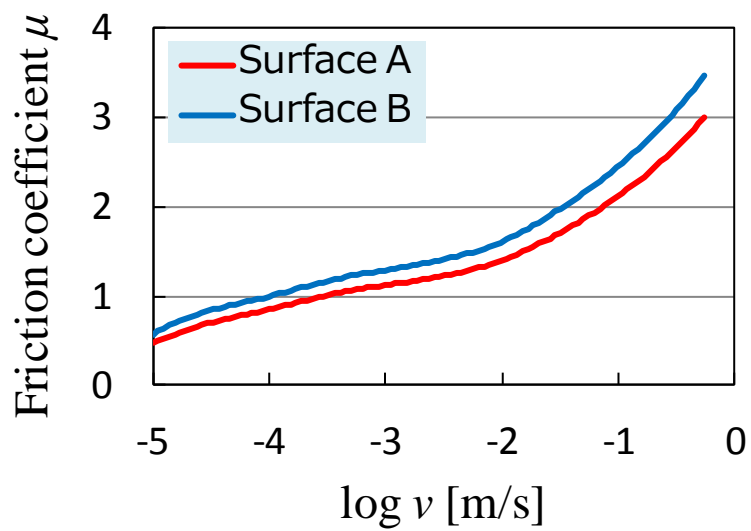


Fig. D-1 Numerical results of friction coefficient with constant q_1 .

付録 E: 異なるゴム試験片の摩擦係数

組成・複素弾性率

本論で用いたものとは異なる粘弾性特性を持つゴム試験片の摩擦係数を計算する。以降、本論で用いたゴム試験片をゴム 1, 新たに計算を行うゴム試験片をゴム 2 とする。ゴム 2 の配合データを Table E-1 に、複素弾性率を Fig. E-1 に示す。ゴム 2 は、貯蔵弾性率がゴム 1 の 0.59~0.62 倍, 損失弾性率がゴム 1 の 1.02~0.65 倍である。

Table E-1 Properties of rubber 2.

Diameter [mm]	40
SBR [phr]	100
Carbon black [phr]	60
Softener [phr]	40
Sulfur [phr]	1.5
Others	Age inhibitor, Rubber accelerator, etc.

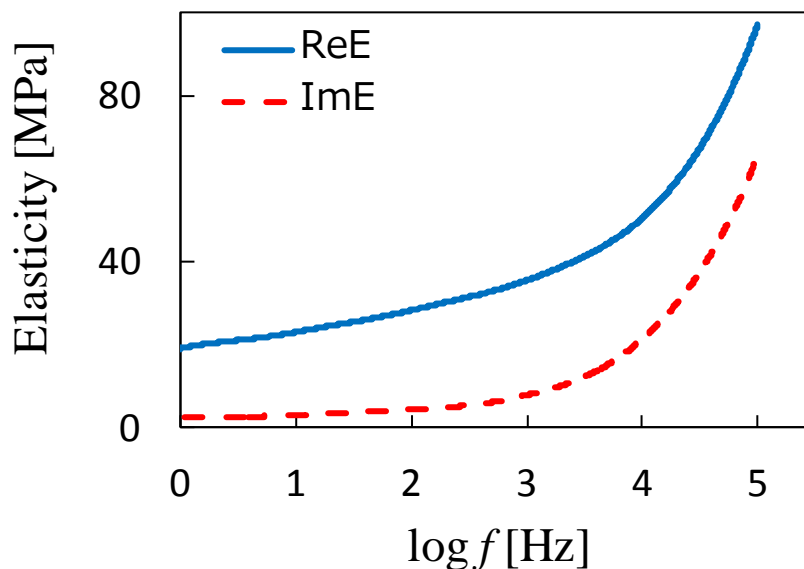


Fig. E-1 The complex modulus of elasticity (Rubber2).

摩擦係数の計算

Table E-2 に計算条件を示す。ここで、カットオフ波数の設定に関しては、7.1 節で述べた通り、ゴム 1 とゴム 2 で異なる弾性エネルギー密度の上限値を設定しなければならない。ここでは、モデル計算として、ゴム 1 とゴム 2 が付録 D と同じ一定のカットオフ波数となると仮定し、計算を行った。Fig. E-2 にゴム 2 の摩擦係数の計算結果を示す。Fig. E-3 と Fig. E-4 にゴム 1 とゴム 2 摩擦係数の比較を示す。この結果から、単純に損失弾性率の大小では摩擦係数の相対的な大きさは評価できないことがわかる。

Table E-2 Calculation conditions of friction coefficient with different test pieces.

		Surface A	Surface B
Surface data	q_0 [1/m]	7731.4	7731.4
	h_0 [m]	8.58×10^{-5}	7.83×10^{-5}
	H	0.48775	0.40485
Viscoelastic property	$E(\omega)$ [Pa]	Rubber1, Rubber2	
	ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		300	
Cut off wave vector q_1		$q_0 \times 147$	$q_0 \times 142$
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-5} \sim 5.53 \times 10^{-1}$	

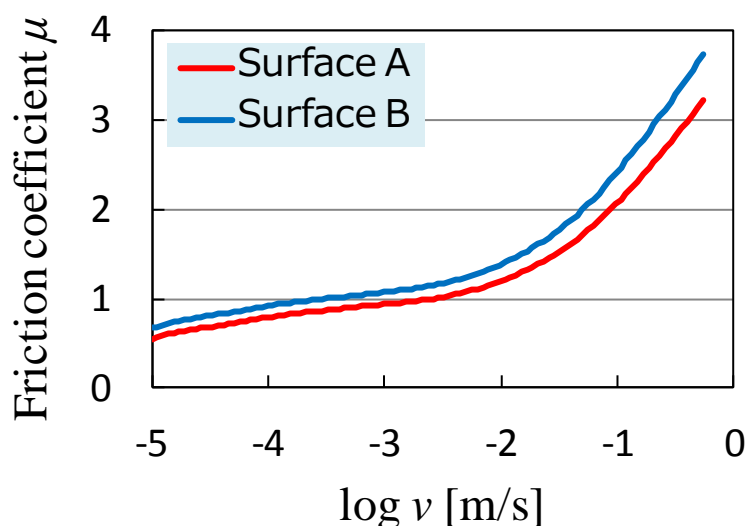


Fig. E-2 Numerical results of friction coefficient of Rubber2.

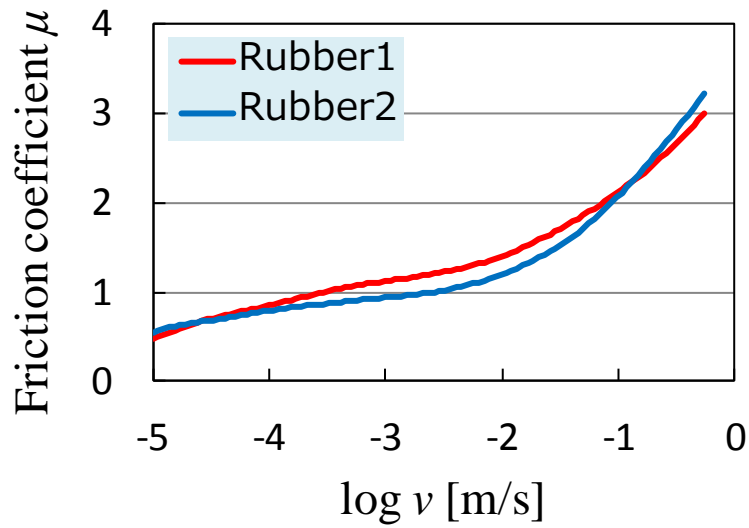


Fig. E-3 Comparison of friction coefficient between Rubber1 and Rubber2 (Surface A).

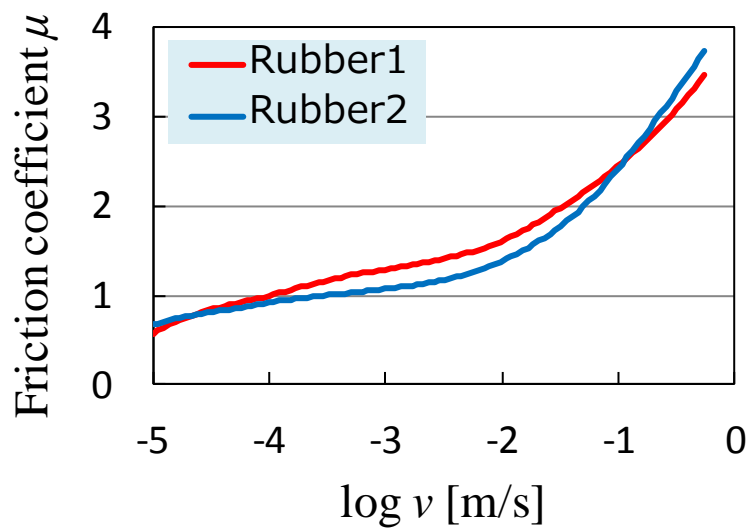


Fig. E-4 Comparison of friction coefficient between Rubber1 and Rubber2 (Surface B).

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々にご指導、ご協力を頂きました。

酒井信介教授には、研究の進め方、研究内容に対する助言など、多くの場面でお世話になりました。心より感謝申し上げます。

泉聡志准教授には、研究テーマ設定から内容に関するアドバイスまで、研究を進めるにあたり数多くの助言をいただきました。心より感謝申し上げます。

原祥太郎講師には、研究方針に対する助言をいただき、また、普段から気さくに接していただきました。ありがとうございました。

田中展助教には、普段から研究の相談に乗っていただき、研究全般において大変お世話になりました。また、普段の楽しい会話も精神面での支えとなりました。ありがとうございました。

株式会社ブリヂストンの門脇弘様には、データの提供、実験の実施など多大な協力をしていただきました。ありがとうございました。

独立行政法人労働安全衛生研究所の山際謙太さんには、計測機の使い方を教えていただきました。ありがとうございました。

秘書の小山恵子さんには、様々な事務処理を通じて研究を裏から支えていただきました。ありがとうございました。

技術間の浅川武さんには、様々な技術的な話を聞かせていただきました。

社会人博士の戒田拓洋さんには、社会人生活について聞かせていただきました。

博士3年の孫瑜さんには、研究に対する姿勢を学ばせていただきました。

修士2年の緒方公俊君、神谷翔太君、田中雅浩君、前田惇貴君、松本俊作君、皆のおかげで修士の2年間楽しい研究室生活を送ることができました。

緒方公俊君には、同じ摩擦関係の研究をしている仲間として、様々な協力をしていただきました。ありがとうございました。

神谷翔太君には、普段からその行動や言動で楽しい気分にさせていただきました。ありがとうございました。

田中雅浩君には、計算機の使い方を教えていただきました。これからもよろしく願います。ありがとうございました。

前田惇貴君には、普段からちょっとした様々な質問に答えていただきました。また、旅行の企画もしていただきました。ありがとうございました。

松本俊作君には、自分の専門外のような知識を教えていただきました。ありがとうございました。

修士1年の木村浩明君，桐谷聡一君，曲強君，四方健太郎君，高尾康太君，田矢寛成君，村中亮太君，森住竜雄君には，研究室の環境整備や雑務でお世話になりました．特に高尾康太君には，同じ摩擦関係の研究チームとして，表面観察などで協力していただき，研究がはかどりました．ありがとうございました．

学部4年の池田和寛君，ウトラヌソンウァチャラポン君，栗山和樹君，興石和輝君，小林祐之君，白井宏尚君，成田定治君には，その明るい会話で研究室の雰囲気をもっと明るく保っていただきました．ありがとうございました．

ここに挙げた以外にも多くの方にお力添えをいただきました．本当にありがとうございました．

最後に，こうして本研究を最後までやり遂げることができたのも両親の全面的支えがあったからです．厚くお礼を申し上げます．

2012年2月10日 熊沢卓

参考文献

- [1] 深堀 美英, “設計のための高分子の力学 高分子鎖が織りなす力学の世界,” 技報堂出版, 2000.
- [2] J. F. Archard, “Contact and Rubbing of Flat Surfaces,” *Journal of Applied Physics*, Vol.24, No.8, pp.981-988, 1953.
- [3] J. A. Greenwood, “Constriction resistance and the real area of contact,” *Brit. J. Appl. Phys.*, Vol.17, 1966.
- [4] Eugene Guth, “Theory of Filler Reinforcement,” *Journal of Applied Physics*, Vol.16, No.20, pp.20-25, 1945.
- [5] Meng-Jiao Wang, “Effect of polymer-filler and filler-filler interactions on dynamic properties of filled vulcanizates,” *Rubber Chemistry and Technology*, Vol.71, No.3, pp.520-589, 1998.
- [6] 牧浦 雅仁, “ゴムとフィラーについて,” *日本ゴム協会誌*, Vol.71, No.9, pp.583-587, 1998.
- [7] Jianping Gao, W. D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J. N. Israelachvili, Uzi Landman, “Frictional Forces and Amonton’s Law : From the Molecular to the Macroscopic Scale,” *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol.108, pp.3410-3425, 2004.
- [8] F. P. Bowden, D. Tabor, “THE FRICTION AND LUBRICATION OF SOLIDS,” Oxford at The Clarendon Press, 1950.
- [9] Izabela Szlufarska, Michael Chandross, Robert W Carpick, “Recent advances in single-asperity nanotribology,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol.41, pp.1-39, 2008.
- [10] B. N. J. Persson, “On the theory of rubber friction,” *Surface Science*, Vol.401, pp.445-454, 1998.
- [11] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “Qualitative theory of rubber friction and wear,” *Journal of Chemical Physics*, Vol.112, No.4, pp.2021-2029, 2000.
- [12] B. N. J. Persson, “Theory of rubber friction and contact mechanics,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.8, pp.3840-3861, 2001.
- [13] B. N. J. Persson, O Albohr, U Tartaglino, A I Volokitin, E Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.17, pp.1-62, 2005.
- [14] B. N. J. Persson, “Rubber friction : role of the flash temperature,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.18, pp.7789-7823, 2006.
- [15] B. N. J. Persson, “Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface” *The European Physical Journal E*, Vol.8, pp.385-401, 2002.

-
- [16] B. N. J. Persson, E. Tosatti, "The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids," *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.12, pp.5597-5610, 2001.
- [17] Hiroshi Jinnai, Yuki Shinbori, Tatsuro Kitaoka, Keizo Akutagawa, "Three-Dimensional Structure of a Nanocomposite Material Consisting of Two Kinds of Nanofillers and Rubbery Matrix Studied by Transmission Electron Microtomography," *Macromolecules*, Vol.40, pp.6758-6764, 2007.
- [18] 富田 佳宏, "補強材充てんゴムの粘弾性変形応答シミュレーション," *日本ゴム協会誌*, Vol.82, No.11, pp.464-471, 2009.
- [19] Yifei Mo, Kevin T. Turner, Izabela Szlufarska, "Friction laws at the nanoscale," *nature*, Vol.457, No.26, pp.1116-1119, 2009.
- [20] <http://octa.jp/>
- [21] 小林 直樹, "高機能材料設計プラットフォーム OCTA のゴム分散系材料への適用," *日本ゴム協会誌*, Vol.82, No.4, pp.136-139, 2004.
- [22] P. Gabriel, A.G. Thomas, J.J.C. Busfield, "Influence of interface geometry on rubber friction," *Wear*, Vol.268, pp.747-750, 2010.
- [23] 村岡 清繁, "タイヤ用ゴムにとって粘弾性とは," *日本ゴム協会誌*, Vol.74, No.6, pp.242-247, 2001.
- [24] K. A. Grosch, "The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber," *Proceedings of the Royal Society*, Vol.274, pp.21-39, 1963.
- [25] K. C. Ludema, D. Tabor, "The friction and visco-elastic properties of polymeric solids," *Wear*, Vol.9, pp.329-348, 1966.
- [26] 原 義則, "塗膜の物性評価(1)," *塗料の研究*, No.151, pp.23-33, 2009.
- [27] 中村 昌生, "豆知識(35)," *日本ゴム協会誌*, Vol.81, No.2, pp.78, 2008.
- [28] F. R. Schwarzl, H. W. Bree, C. J. Nederveen, G. A. Schwippert, L. C. E. Struik, C. W. van der Wal, "Behaviour of unfilled and filled rubbers in shear in the glass-rubber transition region," *Rheologica Acta*, Vol.5, No.4, pp.170-175, 1966.
- [29] M. Barquins, R. Courtel, "Rubber friction and the rheology of viscoelastic contact," *Wear*, Vol.32, pp.133-150, 1975.
- [30] B. Lorenz, B. N. J. Persson, S. Dieluweit, T. Tada, "Rubber friction : Comparison of theory with experiment," *The European Physical Journal E*, Vol.34, No.12, pp.1-11, 2011.
- [31] 広中 清一郎, "摩擦と摩耗のはなし," *日本ゴム協会誌*, Vol.72, No.4, pp.186-193, 1999.
- [32] F. P. Bowden, D. Tabor, "Friction, lubrication and wear : a survey of work during the last decade," *British Journal of Applied Physics*, Vol.17, No.12, pp.1521-1544, 1966.
-

-
- [33] Phil Attard, "Friction, adhesion, and deformation : dynamic measurements with the atomic force microscope," *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol.16, No.7, pp.753-791, 2002.
- [34] G. Carbone, B. Lorenz, B. N. J. Persson, A. Wohlers, "Contact mechanics and rubber friction for randomly rough surfaces with anisotropic statistical properties," *The European Physical Journal E*, Vol.29, No.3, pp.275-284, 2009.
- [35] R. S. Rivlin, A. G. Thomas, "Rupture of Rubber. I. Characteristic Energy for Tearing," *Journal of Polymer Science*, Vol.10, No.3, pp.291-318.
- [36] G. J. Lake, P. B. Lindley, "The Mechanical Fatigue Limit for Rubber," *Journal of Applied Polymer Science*, Vol.9, pp.1233-1251, 1965.
- [37] 佐藤 良泰, "ゴム状粘弾性物質の破壊現象 (その1) (基礎的な考え方と現象解析の手引)," *日本ゴム協会誌*, Vol.39, No.8, pp.602-621, 1966.
- [38] Desmond F. Moore, "The Friction and Lubrication of Elastomers," Pergamon Press, pp.14, 1972.
- [39] Desmond F. Moore, "Friction and wear in rubbers and tyres," *Wear*, Vol.61, pp.273-282, 1980.
- [40] 網野 直也, 内山 吉隆, 岩井 智昭, "シリカ配合およびカーボン配合 SBR の摩擦機構に関する研究- 乾燥面との摩擦-," *日本ゴム協会誌*, Vol.74, No.3, pp.110-115, 2001.

以上

修士論文

マルチスケールモデルによる
タイヤゴムの摩擦係数予測

p.1 – p.99 完

2012年2月10日提出

指導教員 酒井 信介 教授

106193 熊沢 卓